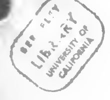
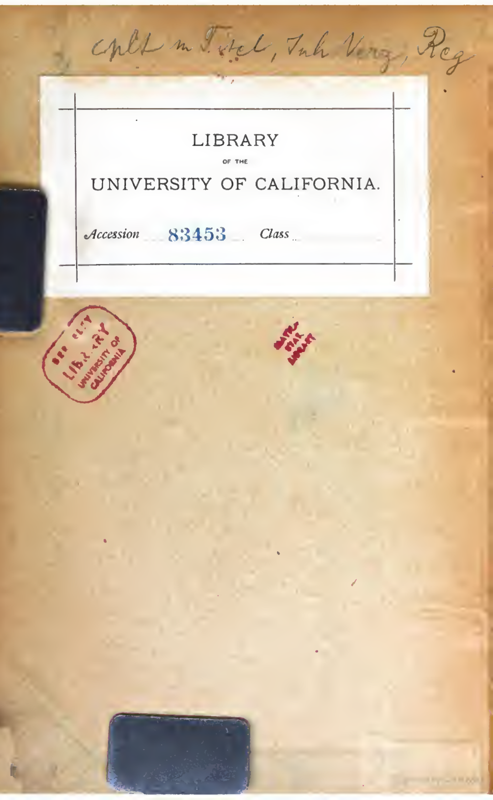

UC-NRLF
B 3 976 229

Cplt m Titel, Inh. Verz., Reg











Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.



München.
Verlag der K. Akademie.
1893.

In Commission bei G. Franz.



Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXII
Jahrgang 1892.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 133. Stiftungstages am 28. März 1892.

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1892.

Sitzung vom 9. Januar 1892.

Sitzung vom 6. Februar 1892.

Sitzung vom 5. März 1892.

Sitzung vom 7. Mai 1892.

Sitzung vom 11. Juni 1892.

Sitzung vom 2. Juli 1892.

Sitzung vom 5. November 1892.

Sitzung vom 3. Dezember 1892.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 9. Januar 1892.

1. Herr K. A. v. ZITTEL berichtete über den Fortgang seiner Monographie über fossile Spongien und legte zugleich eine Abhandlung seines Mitarbeiters, des Herrn Dr. HERMANN RAUFF in Bonn: „Untersuchungen über die Organisation und die systematische Stellung der Receptaculitiden" vor. Dieselbe soll in die Denkschriften aufgenommen werden.

2. Herr GUSTAV BAUER hielt einen Vortrag: „über die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als eine Summe von $n+1$ Potenzen."

Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als eine Summe von $n+1$ Potenzen.

Von Gustav Bauer.

(Eingelaufen 15. Januar.)

1. Ist f eine binäre Form n^{ten} Grads, ψ eine solche i^{ten} Grads

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n \qquad (1)$$

$$\psi = b_0 x_1^i + \binom{i}{1} b_1 x_1^{i-1} x_2 + \cdots + b_i x_2^i \quad (i < n) \qquad (2)$$

und man bildet aus $\psi(x_1, x_2)$ das Operationssymbol

$$\psi\left(\frac{\partial.}{\partial x_2}, -\frac{\partial.}{\partial x_1}\right)$$

und operirt hiemit auf f, so erhält man, wie bekannt, eine Covariante von f und ψ (Intermutante) vom Grade $n-i$

$$V = c_0 x_1^{n-i} + \binom{n-i}{1} c_1 x_1^{n-i-1} x_2 + \cdots, \qquad (3)$$

deren Coefficienten c durch die Formel

$$c_k = a_k b_i - \binom{i}{1} a_{k+1} b_{i-1} + \binom{i}{2} a_{k+2} b_{i-2} + \cdots \qquad (4)$$

bestimmt sind. Ist speziell $i = n$, so reducirt sich V auf eine Invariante

$$V_0 = a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n b_0.$$

Denkt man sich durch die Formen f und ψ n, resp. i, Punkte einer Geraden dargestellt, so ist die Covariante V geometrisch definirt als die gemischte Polare der i Punkte ψ in Bezug auf die n Punkte f. Sind nun die Coefficienten b von ψ so bestimmt, dass die sämmtlichen Coefficienten $c_0 \cdots c_1 \cdots c_{n-i}$ von V verschwinden, so kann man[1]), analog zu der Bezeichnung von Herrn Reye im ternären und quaternären Gebiet, die Form ψ als apolar zu f bezeichnen, und es gilt dann allgemein der Satz: Soll die Funktion f in eine Summe von i Potenzen zerlegt werden, in der Weise (5)

$$f = \mu_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^n + \mu_2 (x_1 - \alpha_2 x_2)^n + \cdots + \mu_i (x_1 - \alpha_i x_2)^n$$

so müssen $x_1 - \alpha_1 x_2, x_1 - \alpha_2 x_2 \cdots$ Linearfaktoren einer zu f apolaren Form ψ sein.

Ist $i = \frac{n+1}{2}$ (n ungerade), so ist ν vom Grade $\frac{n-1}{2}$ mit $\frac{n+1}{2}$ Coefficienten, und man hat mithin $\frac{n+1}{2}$ Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten b. Die apolare Function ψ ist dann vollkommen bestimmt und es gibt dann auch nur eine Zerlegung von f in $\frac{n+1}{2}$ Potenzen. Es ist die bekannte von Sylvester gegebene Zerlegung einer Form vom Grade $2m-1$ in die canonische Form einer Summe von m Potenzen.[2])

Ist $i = n$, so hat man nur eine Bedingungsgleichung für die b, nämlich $V_0 = 0$; man kann dann die b so bestimmen, dass ψ apolar wird zugleich zu n Formen $f_1 \cdots f_n$ n^{ten} Grads, welche sämmtlich mittelst der Linearfaktoren von ψ in Summen

---

1) Sturm, „Darstellung bin. Formen auf der cubischen Raumcurve. Crelle's Journ. Bd. 86. S. 117.

2) Philos. Mag. 4. Ser. Vol. II. 1851. S. 391.

von n Potenzen zerlegt werden können, wie dies zuerst von Herrn Rosanes gezeigt worden.[1])

Liegt i zwischen diesen Grenzen, so hat man überhaupt nicht die genügende Anzahl von Bedingungsgleichungen, um die Coefficienten f zu bestimmen; es gehen dann willkürliche Grössen in die Coefficienten von ψ ein; und folglich auch in die Entwicklung von f in ein Aggregat von Potenzen. Ist hingegen $i < \frac{n+1}{2}$, so hat man mehr Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten von ψ als zu deren Bestimmung nöthig ist, und es müssen sodann $n - 2i + 1$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten a von f bestehen, wenn eine Entwicklung von f in eine Summe von i Potenzen möglich sein soll.

In der oben angeführten Abhandlung „Ueber ein Princip etc.“ ist von Herrn Rosanes zuerst die Beziehung dargelegt worden, welche zwischen der Entwicklung binärer Formen in Potenzsummen und den apolaren Formen besteht und aus dieser Darlegung, sowie auch denen von Herrn Sturm lässt sich der obige allgemeine Satz über die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen unschwer erschliessen. Auch die Analyse Sylvesters lässt sich mit leichter Modification dem allgemeinen Falle anpassen. Ich werde hier der letzteren zunächst folgend die Zerlegung einer binären Form n^{ten} Grads in i Potenzen betrachten, zu dem Zwecke, die erhaltenen Resultate anzuwenden auf die Entwicklung einer geraden Form $2n^{\text{ten}}$ Grads in eine Summe von $n+1$ Potenzen. Diese Zerlegung ergibt sich, nur von invarianten Formen

1) Crelle's Journ. Bd. 75. „Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen“ u. besonders Bd. 76 „Ueber e. Princip der Zuordnung algebr. Formen“. Herr Rosanes betrachtet nur den Fall $i = n$ und nennt in diesem Falle die Formen für f und ψ „conjugirt“. — S. auch Sturm, a. a. O.

abhängig, in einer so einfachen und eleganten Gestalt, dass sie wohl mitgetheilt zu werden verdient.

2. Aus der Vergleichung der Coefficienten der Form

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots \tag{1}$$

mit den Coefficienten der Entwicklung

$$f = \mu_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^n + \cdots + \mu_i (x_1 - \alpha_i x_2)^n \tag{2}$$

ergeben sich sofort die $n+1$ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \mu_1 \alpha_1^k + \mu_2 \alpha_2^k + \cdots + \mu_i \alpha_i^k = (-1)^k a_k \\ (k = 0, 1, \cdots n) \end{array}\right\} \tag{3}$$

Aus irgend i dieser Gleichung erhält man die Werthe der μ. Nehmen wir zuerst die i ersten dieser Gleichung um μ_1 zu berechnen, sodann die i Gleichungen von der 2ten an u. s. f., schliesslich die i letzten Gleichungen des Systems, so haben wir $n+2-i$ Systeme von je i Gleichungen, aus welchen wir ebensoviele Werthe für μ_1 finden. Die Vergleichung dieser Werthe liefert $n+1-i$ Relationen zwischen den Grössen $\alpha_1 \cdots \alpha_i$ und den Coefficienten a. Um diese zu berechnen, nehmen wir die i Gleichungen.

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 \alpha_1^k + \cdots + \mu_i \alpha_i^k + (-1)^{k+1} a_k = 0 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_1 \alpha_1^{k+i-1} + \cdots + \mu_i \alpha_i^{k+i-1} + (-1)^{k+i} a_{k+i-1} = 0 \end{array}\right\},$$

woraus sich ergibt

$$\Delta \mu_1 = \frac{(-1)^{k+i}}{\alpha_1^k} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 & -a_k \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \alpha_i & +a_{k+1} \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots \alpha_i^2 & -a_{k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_2^{i-1} & \alpha_3^{i-1} & \cdots \alpha_i^{i-1} & (-1)^i a_{k+i-1} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

wo

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdot & \cdot & \alpha_i \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdot & \cdot & \alpha_i^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-1} & \cdot & \cdot & \alpha_i^{i-1} \end{vmatrix} . \tag{5}$$

Setzen wir in (5) $k+1$ statt k, setzen sodann die beiden Werthe von μ_1 einander gleich und entwickeln die beiden Determinanten nach den Coefficienten a, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\alpha_1 (a_k \delta_{0,1} + a_{k+1} \delta_{1,1} + \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-1,1}) \\ &\quad + a_{k+1} \delta_{0,1} + a_{k+2} \delta_{1,1} \cdots + a_{k+i-1} \delta_{i-2,1} + a_{k+i} \delta_{i-1,1} \quad 0 \end{aligned} \tag{6}$$

wenn man mit $\delta_{r,s}$ die Unterdeterminante von $\varDelta$ bezeichnet, welche man erhält, wenn man in $\varDelta$ die Reihe der r^{ten} Potenzen und die Vertikalreihe mit der Wurzel α_s streicht. Nun ergibt sich unschwer die Formel

$$\delta_{r,s} = \delta_{i-1,s} \cdot \pi^{(s)}_{i-1-r}, \tag{7}$$

wo $\pi^{(s)}_{i-1-r}$ die Summe der Combinationen aller Wurzeln α mit Auschluss von a_s zu je $i-r-1$ bezeichnet. Die Grösse $\delta_{i-1,s}$ aber ist, wie man aus ihrer Determinantenform sofort ersieht, das Product sämmtlicher Differenzen der Wurzeln α mit Ausschluss von α_s mit einem gewissen Zeichen behaftet, nämlich

$$(-1)^{i+s} \cdot \delta_{i-1,s} = \frac{\varDelta}{(\alpha_s - \alpha_1)(\alpha_s - \alpha_2) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)} . \tag{8}$$

Ersetzt man nun in (6) die Grössen $\delta_{r,1}$ durch ihre Werthe aus (7), so verwandelt sie sich in folgende Gleichung

$$\begin{aligned} &a_k \cdot \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_i + a_{k+1} \Sigma \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} + \cdots \\ &+ a_{k+i-1} \Sigma \alpha_1 + a_{k+1} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

wo die Σ symmetrische Funktionen sämmtlicher Wurzeln α (α_1 einbegriffen) sind. Die Symmetrie der Gleichung in Be-

zug auf sämmtliche Grössen α zeigt, dass wir immer dieselbe Gleichung erhalten würden, wenn wir zur Berechnung statt μ_1 irgend ein anderes μ benützen würden. Wir haben also nur diese Relation zwischen den a und den α; dieselbe zählt aber für $n+1-i$ Relationen, da sie für jedes k von $k=0$ bis $k=n-i$ gilt.

Ist

$$\psi = b_0\, x_1^i + \binom{i}{1} b_1\, x_1^{i-1} x_2 + \cdots = 0 \tag{10}$$

die Gleichung, deren Wurzeln die Grössen $\alpha_1 \cdots \alpha_i$ sind, so geht die Relation (9) über in

$$a_k\, b_i - \binom{i}{1} a_{k+1}\, b_{i-1} + \binom{i}{2} a_{k+2}\, b_{i-2} - \cdots \pm a_{k+i}\, b_0 = 0 \tag{11}$$
$$(k = 0, 1, \cdots n-i.)$$

Damit ist aber der Beweis geliefert, dass die Covariante V verschwinden, d. h. ψ zu f apolar sein muss.

Was nun aber die Coefficienten μ in der Entwicklung (2) betrifft, so ist μ_s durch die Gleichung (4) gegeben, wenn wir statt der Reihe der Potenzen von α_1 die Reihe der Potenzen von α_s weglassen und den Faktor $(-1)^{s-1}$ beifügen. Die Die Entwicklung der Determinanten liefert sodann

$$\Delta\, \mu_s = \frac{(-1)^{k+s-1}}{\alpha_s^k} (a_k\, \delta_{0,s} + a_{k+1}\, \delta_{1,s} + \cdots + a_{k+i-1}\, \delta_{i-1,s})$$

oder wenn wir die $\delta_{r,s}$ durch ihre Werthe aus (7) und (8) ersetzen,

$$\mu_s = \frac{(-1)^{k+i-1}}{\alpha_s^k} \cdot \frac{a_{k+i-1} + \pi_1^{(s)}\, a_{k+i-2} + \cdots + \pi_{i-1}^{(s)}\, a_k}{(\alpha_s - \alpha_1)(\alpha_s - \alpha_2) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)} \tag{12}$$

Aus diesem Ausdruck für μ_s können wir aber alle α ausser α_s mit Hilfe der Funktion ψ entfernen. Denn es ist, wenn ψ' die Abgeleitete von $\psi(x)$ bezeichnet

$$\psi'(\alpha_s) = b_0\, (\alpha_s - \alpha_1) \cdots (\alpha_s - \alpha_i)$$

Setzen wir ferner (13)

$$\frac{\psi}{x_1 - \alpha_s x_2} = b_0\, x_1^{i-1} + \binom{i-1}{1} b_1^{(s)} x_1^{i-2} x_2 + \cdots + b_{i-1}^{(s)}\, x_2^{i-1}\,,$$

so ist $\binom{i-1}{1}\frac{b_1^{(s)}}{b_0} = -\,n_1^{(s)}$ u. s. f. und der Ausdruck für μ_s nimmt die Form an

$$\mu_s =$$

$$\frac{(-1^{k+i-1}}{\alpha_s^k \cdot \psi'(\alpha_s)} \cdot \left(b_0 a_{k+i-1} - \binom{i-1}{1} b_1^{(s)} a_{k+i-2} + - \cdots \pm b_{i-1}^{(s)}\, a_k\right) \quad (14)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n-i+1).$$

Da die Coefficienten b nur von den a abhängen, aber die α nicht enthalten, so enthalten die $b^{(s)}$ nur die eine Wurzel α_s und man ersieht mithin, dass sich die Grössen μ immer so bestimmen lassen, dass der Coefficient μ_s, der in der Entwicklung nach Potenzen $(x_1 - \alpha_s x_2)^n$ multiplicirt, nur α_s enthält.[1])

3. Wenden wir nun diese allgemeinen Formeln an auf die Entwicklung einer Form vom Grade $2n$

$$f = a_0 x_1^{2n} + \binom{2n}{1} x_1^{2n-1} x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_2^{2n} \quad (1)$$

in eine Summe von $n+1$ Potenzen.

Die apolare Form

$$\psi = b_0 x_1^{n+1} + \binom{n+1}{1} b_1\, x_1^n\, x_2 + \cdots \quad (2)$$

ist in diesem Falle nicht vollständig bestimmt, da das Gleichungsystem (11) n°2 nur $2n - (n+1) = n-1$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+1$ Coefficienten b liefert. Wir könnten aus diesem System die b in der Form $p\lambda + q\lambda'$, $p_1\lambda + q_1\lambda'$,

---

1) **Man ersieht übrigens auch, dass $\psi = 0$ keine gleichen Wurzeln enthalten darf, wenn die Entwicklung möglich sein soll.**

u. s. f. berechnen, wo λ, λ' unbestimmte Grössen, und es bliebe sodann die willkürliche Grösse $\frac{\lambda}{\lambda'}$ in den Werthen der Wurzeln α und der Grössen μ. Oder auch, wir könnten zu dem System (11) noch eine beliebige lineäre Gleichung

$$a'_0 b_{n+1} + a'_1 b_n + \cdots a'_{n+1} b_0 = 0$$

hinzufügen. Sind hier die a' gegebene Zahlen, so bliebe nichts Unbestimmtes mehr in den b und wir würden eine spezielle Entwicklung erhalten. Lassen wir aber die a' unbestimmt, so würden diese in die b eingehen, ohne dass jedoch eine grössere Allgemeinheit in der Entwicklung dadurch erzielt würde, als im ersten Falle, wenn wir keine weitere Gleichung zu Hülfe nehmen. Zweckmässiger wird es jedoch bei dieser Unbestimmtheit der Coefficienten b sein, eine Wurzel α der Gleichung $\psi = 0$ als willkürlich gegeben anzusehen. Dann muss sich eine Gleichung aufstellen lassen, welche mittelst dieser Wurzel die n übrigen Wurzeln α bestimmt und mithin nur noch vom n^{ten} Grade ist. Diese Gleichung ergiebt sich auf folgende Weise.

Nach Gleichung (14) oder (12) haben wir für μ_s das System von Gleichungen

$$(-1)^{k+n} \cdot \alpha_s^k \psi'(\alpha_s) \mu_s = a_{k+n} + \pi_1^{(s)} a_{k+n-1} + \cdots + \pi_n^{(s)} a_k. \quad (3)$$
$$(k = 0, 1, \cdots n)$$

wo der Kürze wegen ψ statt $\frac{1}{b_0}\psi$ gesetzt ist, also

$$\psi'(\alpha_s) = (\alpha_s - \alpha_1) \cdots (\alpha_s - \alpha_{s+1})(\alpha_s - \alpha_{s+1}) \cdots (\alpha_s - \alpha_n). \quad (4)$$

Die Elimination der n Grössen π aus diesem System liefert

$$\begin{vmatrix} a_0 a_1 \cdots a_n \\ a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \\ \cdots \\ a_n a_{n+1} \cdots a_{2n} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & -\alpha_s \\ \cdots & & & & \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} & \pm\alpha_s^n \end{vmatrix} \cdot (-1)^n \psi'(\alpha_s) \mu_s = 0$$

Setzen wir

$$\begin{vmatrix} a_0\, a_1 \cdots a_n \\ a_1\, a_2 \cdots a_{n+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n\, a_{n+1} \cdot a_{2n} \end{vmatrix} = J, \quad \begin{vmatrix} a_0\, a_1 \cdots a_{n-1} & 1 \\ a_1\, a_2 \cdots a_n & -\alpha \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ a_n \cdots \quad a_{2n-1} & \pm\alpha_s^n \end{vmatrix} = A_s \qquad (5)$$

so ist mithin

$$(-1)^n \mu_s = \frac{J}{A_s \psi'(\alpha_s)}. \qquad (6)$$

Nun ist ferner $\psi' x = 0$ die Gleichung, welche die sämmtlichen α mit Ausnahme von α_s zu Wurzeln hat. Also ist

$$\psi'(x) = x^n - \pi_1^{(s)} x^{n-1} + \pi_2^{(s)} x^{n-2} - \cdots \pm \pi_n^{(s)} = 0 \quad (7)$$

die Gleichung dieser Wurzeln. Nehmen wir diese Gleichung, zu dem System (3) hinzu und eliminiren aus den $n+2$ Gleichungen zugleich die π und ψ', so erhält man die gesuchte Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & +x^2 & \cdots & \pm x^n & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} & -\alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n} & \pm\alpha_s^n \end{vmatrix} = 0, \qquad (8)$$

welche, wenn α_s gegeben die n übrigen Wurzeln α gibt. Der Coefficient der höchsten Potenz x^n in dieser Gleichung ist A_s. Also ist diese Determinante in (8), wie aus (7) zu ersehen $= A_s \psi'(x)$. Der Nenner von μ_s in (6) ist also das, was diese Determinante wird, wenn man darin α_s statt x setzt. Also

$$(-1)^n \mu_s = \frac{J}{H(\alpha_s)}, \qquad (9)$$

wo

$$H(\alpha_s) = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_s + \alpha_s^2 & \cdot\cdot \pm \alpha_s^n & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \cdot\cdot & a_n & 1 \\ a_1 & a_1 & a_3 \cdot\cdot & a_{n-1} & -\alpha_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} \cdot\cdot & a_{2n} & \pm a_s^n \end{vmatrix} \tag{10}$$

und die Entwicklung von f ist mithin

$$(-1)^n \cdot f = \tag{11}$$

$$J \left\{ \frac{(x_1 - \alpha_1 x_2)^{2n}}{H(\alpha_1)} + \frac{(x_1 - \alpha_2 x_2)^{2n}}{H(\alpha_2)} + \cdots + \frac{(x_1 - \alpha_{n+1} x_2)^{2n}}{H(\alpha_{n+1})} \right\}$$

Die Determinanten die zu dieser Entwicklung dienen, sind bekannte Covarianten, resp. Invarianten von f. J ist die bekannte Invariante $n+1^{\text{ten}}$ Grads, welche symbolisch, wenn

$$f = b_x^{2n} = c_x^{2n} = \cdots = g_x^{2n} = h_x^{2n},$$

durch die Formel dargestellt wird,

$$J = (bc)^2 (bd)^2 \cdots (gh)^2. \tag{12}$$

H ist eine Covariante $C_{2n,n}$ von der Ordnung $2n$ und vom Grade n in den Coefficienten. Sie ist die Evektante der Invariante J_{n+1} und stellt sich mithin symbolisch in der Form dar

$$H = (cd)^2 \cdots (gh)^2 c_x^2 d_x^2 \cdots h_x^2 \tag{13}$$

Diese Covariante lässt sich auch schreiben, wenn C ein Zahlenfaktor,

$$H = C. \begin{vmatrix} \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-2}} & \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-3} dx_2} & \cdot\cdot & \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} \\ \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{2n-3} dx_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx^{2n-2} \cdot f}{dx_1^{n-1} dx_2^{n-1}} & \cdot & \cdot & \frac{d^{2n-2} \cdot f}{dx_2^{2n-2}} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Ist f eine biquadratische Form, so ist H die Hesse'sche Covariante.

Die Determinante (8), welche die Wurzeln α liefert, wenn α_s gegeben, ist eine Covariante vom n^{ten} Grad in den x, und in den α und auch vom n^{ten} Grad in den a. Sie ist, wie sich aus den folgenden n^0 4 ergeben wird, die apolare Form n^{ter} Ordnung von der Polaren von α in Bezug auf f, also geradezu die Sylvester'sche Canonisante dieser ungeraden Form $(2n-1)^{ten}$ Grads. Sie kann auch, wenn (α, f) die Polare von α bezeichnet, in der Form geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_1^{2n-2}} \cdot \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{d_1 x_1^{2n-3}\, dx_2} \cdot\cdot \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_1^{n-1}\, dx_2^{n-1}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{d^{2n-2} \cdot (\alpha f)}{dx_1^{n-1}\, dx_2^{n-2}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{d^{2n-2}(\alpha f)}{dx_2^{2n-2}} \end{vmatrix} \tag{15}$$

Der symbolische Ausdruck derselben ist

$$(cd)^2 \cdot\cdot (gh)^2 c_\alpha d_\alpha \cdot\cdot h_\alpha \cdot c_x d_x \cdot\cdot h_x \cdot$$

Hier mögen ein paar Beispiele einer solchen Entwicklung folgen:

1) Sei $f = (x^2-1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{5}, a_3 = 0, a_4 = +\frac{1}{5}, a_5 = 0, a_6 = -1$$

Hiemit berechnet sich

$$J = \frac{4^2}{5^4}$$

Gleichung (8) wird

$$\frac{4}{5^3}\left\{(\alpha+\alpha^3)x^3 - (1+5\alpha^2)x^2 + (5\alpha+\alpha^3)x - (1+\alpha^2)\right\} = 0$$

Auf der linken Seite $x = \alpha$ gesetzt, gibt

$$H(\alpha) = \frac{4}{5^3}(\alpha^2 - 1)^3,$$

also H nur um einen constanten Faktor von f verschieden, analog wie bei biquadratischen Formen, wenn f ein vollständiges Quadrat. Die Zerlegung ist daher

$$-f = \frac{4}{5}\left\{\frac{(x-\alpha_1)^6}{(\alpha_1^2-1)^3} + \frac{(x-\alpha_2)^6}{(\alpha_2^2-1)^3} + \frac{(x-\alpha_3)^6}{(\alpha_3^2-1)^3} + \frac{(x-\alpha_4)^6}{(\alpha_4^2-1)^3}\right\}.$$

Die Wurzel der obigen Gleichung 3ten Grads sind

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha_3 \\ \alpha_4\end{matrix}\right\} = \frac{2\alpha \pm (1-\alpha^2)\sqrt{-1}}{1+\alpha^2}.$$

Einfacher würde die Formel, wenn man $\alpha = \frac{1+\beta}{1-\beta}$ setzt. Dann sind die 4 Wurzeln

$$\alpha_1 = \frac{1+\beta}{1-\beta}, \alpha_2 = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \alpha_3 = \frac{1+\beta\sqrt{-1}}{1-\beta\sqrt{-1}}, \alpha_4 = \frac{1-\beta\sqrt{-1}}{1+\beta\sqrt{-1}},$$

wo nun β beliebig bleibt.

2) Sei $f = 6xy(x^4 + y^4)$.

$$a_1 = a_5 = 1, a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = 0, \text{ also } J = 1.$$

Die Gleichung (8) wird

$$\alpha + \cdot x + \alpha^3 x^2 + \alpha^2 x^3 = 0,$$

deren Wurzeln $\alpha_2 = -\alpha, \alpha_3 = \frac{1}{\alpha}\sqrt{-1}, \alpha_4 = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{-1}$.

Die linke Seite der Gleichung gibt, wenn α statt x gesetzt wird,

$$H(\alpha) = 2\alpha(1 + \alpha^4).$$

Hiermit ist

$$-f = \frac{(x-\alpha)^6}{2\alpha(1+\alpha^4)} - \frac{(x+\alpha)^6}{2\alpha(1+\alpha^4)}$$

$$+\frac{(\alpha x - \sqrt{-1})^6}{2\alpha(1+\alpha^4)\sqrt{-1}} - \frac{(\alpha x+\sqrt{-1})^6}{2\alpha(1+\alpha^4)\sqrt{-1}}$$

Hätten wir entsprechend der Bemerkung am Anfang von $n^0 3$ die apolare Form ψ vom 4ten Grad berechnet, indem wir zu den drei Bedingungsgleichungen (11) $n^0 2$, welchen die Coefficienten b genügen müssen, noch eine Gleichung $a_0' b_4 + \cdots + a_4' b_0 = 0$ mit beliebigen Coefficienten a' hinzunehmen, so hätte man erhalten

$$\psi = -a_2' - x^2(a_4' - a_0') + a_2' x^2 = 0,$$

oder $\frac{a_4' - a_0'}{a_2'} = k$ gesetzt, $x^4 - k x^2 - 1 = 0$, deren Wurzeln

$$x = \pm\sqrt{k \pm \sqrt{k^2+1}} \quad \text{(wo } k \text{ willkürlich).}$$

Irgend eine dieser Wurzeln statt α in Gleichung (8) eingesetzt, liefert die drei andern. Denn für

$$\alpha = +\sqrt{k+\sqrt{k^2+1}} \text{ ist } \alpha_2 = -\alpha, \left.\begin{matrix}\alpha_3\\ \alpha_4\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{k-\sqrt{k^2+1}}$$

$$= \frac{\pm 1}{\alpha}\sqrt{-1},$$ übereinstimmend mit obigem.

4. Herr **Sturm** hat in der angeführten Abhandlung[1]) den Satz gegeben: „Multiplicirt man eine Form V_i mit ihrer Polaren W_{n-i} bezüglich U_n, so erhält man, sobald $n-i$ ungerade ist, eine zu U_n apolare Form n^{ten} Grads." Dieser Satz ist indessen nur ein spezieller Fall von folgendem: Ist ψ_i apolar zu f_n und φ_k stellt k Punkte der apolaren Gruppe ψ_i dar, sodass $\psi_i = \varphi_k \cdot \psi_{i-k}$, wo ψ_{i-k} eine Form $(i-k)^{\text{ten}}$ Grades ist, so muss ψ_{i-k} apolar sein zu der Polaren von φ_k bezüglich

1) Crelle's Journ. 86. p. 119.

f_n, oder, nach der früher gebrauchten Bezeichnung, zu (φ_k, f_n). Dies folgt sofort aus der Theorie der Polaren oder der harmonischen Mittelpunkte.

Ist $i = n$, also $\psi_n = \varphi_k \cdot \psi_{n-k}$, so muss demnach ψ_{n-k} apolar sein zu (φ_k, f_n) und wenn $n-k$ ungerade, so kann man für ψ_{n-k} diese Polare (φ_k, f_n) selbst nehmen, da eine ungerade Form zu sich selbst apolar ist.[1] Dies ist der Satz von Herrn Sturm.

Aus dem allgemeinen Satze ergiebt sich nun aber sofort, was oben (n^0 3) von der Determinante (8), aus welcher die Wurzeln α sich bestimmen, gesagt wurde. Denn ist ψ_{n+1} apolar zu f_{2n} und ψ_{n+1} zerlegt sich in $\varphi_1 \cdot \psi_n$, so muss ψ_n apolar sein zu der Polare $(\varphi_1 \cdot f_{2n})$. Aber diese ungerade Form $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grads hat nur eine apolare Form n^{ten} Grads, nämlich die „Canonisante" von Sylvester, und folglich muss ψ_n eben die Canonisante von $(\varphi_1 \cdot f_{2n})$ sein; also auch die Determinante (8) nach dortiger Bezeichnung die Canonisante von (αf). Von diesen Betrachtungen ausgehend, hätte man direkt zu der Gleichung (8) gelangen können, hätte aber dabei nichts gewonnen für die Bestimmung der Coefficienten μ.

5. Es ist bekannt, dass wenn die Invariante J verschwindet, die Form $f\, 2n^{\text{ten}}$ Grads sich in eine Summe von nur n Potenzen zerlegen lässt. In diesem Falle $J = 0$ verschwindet in der That in der Entwicklung (11) der Coefficient μ_s, welcher zu der beliebigen Wurzel α_s gehört. Die andern Coefficienten μ aber verschwinden im Allgemeinen nicht. Verschwindet nämlich μ_s, so wird das System der $(n+1)$ Gleichungen (3) n^0 3.

$$0 = a_{k+n} + \pi_1^{(s)} a_{k+n-1} + \cdots + \pi_n^{(s)} a_k\,, \qquad (k = 0, 1 \cdots n)$$

1) Rosanes „Ueber ein Princip der Zuordnung etc." Crelle's Journ. 76.

deren Determinante $J = 0$ ist. Lässt man eine dieser Gleichungen, z. B. die letzte, als durch die andere bestimmt, weg und nimmt die Gleichung (7) hinzu, so erhält man für die Gleichung, welche die n übrigen α gibt

$$\begin{vmatrix} 1 - x + x^2 \cdots \pm x^n \\ a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots a_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n-1} \, a_n \quad a_{n+1} \cdots a_{2n-1} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{17}$$

Die willkürliche Grösse α_s hebt sich ganz aus der Potenzdarstellung heraus. Die Determinante in (17) ist aber nichts anderes als die mit A_s bezeichnete Determinante (5), wenn man darin α_s durch x ersetzt. Für jede der n Wurzeln α_i dieser Gleichung verschwindet mithin die Grösse A_i im Nenner des Ausdrucks für μ (6) und alle Coefficienten μ ausser μ_s, welches $= 0$ wird, nehmen die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Dieselben müssen sodann aus den ursprünglichen Gleichungen direkt berechnet werden, aber die Einfachheit ihres Ausdrucks geht verloren.

6. Ist speziell f eine biquadratische Form

$$f = a_0 x_1^4 + 4\, a_1 x_1^3 x_2 + 6\, a_2 x_1^2 x_2^2 + 4\, a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 \quad (1)$$

und ψ die apolare 3ten Grads

$$\psi = b_0 x_1^3 + 3\, b_1 x_1^2 x_2 + 3\, b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3, \tag{2}$$

so hat man die zwei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_0 b_3 - 3\, a_1 b_2 + 3\, a_2 b_1 - a_3 b_0 &= 0 \\ a_1 b_3 - 3\, a_2 b_2 + 3\, a_3 b_1 - a_4 b_0 &= 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Ist nun φ eine zweite biquadratische Form

$$\varphi = a_0' x_1^4 + 4\, a_1' x_1^3 x_2 + \cdots \tag{4}$$

und soll dieselbe Form ψ auch apolar sein zu φ, so hat man die zwei weiteren Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a'_0 b_3 - 3\,a'_1 b_2 + 3\,a'_2 b_0 - a'_3 b_0 &= 0 \\ a'_1 b_3 - 3\,a'_2 b_2 + 3\,a'_3 b_0 - a'_4 b_0 &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

und es ist mithin die Bedingung, dass die zwei Formen dieselbe apolare Form 3ten Grads besitzen,

$$D_{f,\varphi} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (6)$$

Ist diese Bedingung[1]) erfüllt, so kann man zur Bildung der apolaren Form irgend drei der vier Gleichungen (3) und (5) benützen; also

$$\psi = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & -x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

und es werden dann die beiden Formen f und φ nach den Potenzen der Linearfaktoren von ψ entwickelt werden können und ebenso überhaupt alle Formen $f + \lambda\varphi$.

Um die Coefficienten μ der Entwicklung für die ein und die andere Form zu bestimmen, wird man auf die Formeln in $n^0\,2$ zurückgehen. Ist z. B. gegeben

$$\begin{aligned} f &= (x_1 + x_2)^2 = x_1^4 + 2\,x_1^2 x_2^2 + x_2^4 \\ \varphi &= 4\,x_1^3 x_2 + 18\,x_1^2 x_2^2 + 12\,x_1 x_2^3 + 9\,x_2^4\,, \end{aligned}$$

---

1) Die Combinante $D_{f,\varphi}$ lässt sich leicht in die symbolische Form überführen. Ist $f = a_x^4 = b_x^4$, $\varphi = \alpha_x^4 = \beta_x^4$, so erhält man

$$4\,D_{f,\varphi} = (ab)^2 (\alpha\beta)^2 (a\alpha)(a\beta)(b\alpha)(b\beta).$$

so ist die Bedingungsgleichung (6) erfüllt, da $D_{f,\varphi} = 0$ wird. Die apolare Form (7) wird

$$\psi = -3x + x^3,$$

deren Wurzeln $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = +\sqrt{3}, \alpha_3 = -\sqrt{3}$.

Ferner wird für f die Gleichung (8) (n^0 3)

$$\frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{8}{3}\alpha x + (\alpha^2 - \frac{1}{3})x^2\right\} = 0$$

Setzt man in diese Gleichung für α irgend eine der drei Wurzeln $0, \pm\sqrt{3}$ ein, so liefert sie die beiden andern. Die Covariante H (hier die Hesse'sche Form) wird

$$H(\alpha) = \frac{1}{3}(\alpha^2 + 1)^2.$$

Da ferner $J_3 = \frac{8}{27}$, so erhält man für die speziellen Werthe der α die Entwicklung

$$18f = 16x^4 + (x - \sqrt{3})^4 + (x + \sqrt{3})^4.$$

Für φ aber ist $J_3 = 18$, die Gleichung (8) (n^0 3)

$$-6\alpha^2 + 18 - 3(\alpha^2 + 3\alpha)x - (\alpha^2 + 3\alpha + 6)x^2 = 0$$

Ist α eine der drei Wurzeln $0, \pm\sqrt{3}$, so gibt die Gleichung die beiden andern. Hieraus (α statt x gesetzt)

$$H(\alpha) = -(\alpha^4 + 6\alpha^3 + 21\alpha^2 - 18);$$

also

$H(0) = 18, H(\sqrt{3}) = -(3 + \sqrt{3}), H(-\sqrt{3}) = -18(3 - \sqrt{3})$

und die Entwicklung wird

$$\varphi = -x^4 + \frac{(x - \sqrt{3})^4}{3 + \sqrt{3}} + \frac{(x + \sqrt{3})^4}{3 - \sqrt{3}}.$$

7. Eine biquadratische Form f und ihre Hesse'sche

Form $H(f)$ können jedoch nie nach denselben drei Potenzen enwickelt werden.

Denn ist

$$\varphi = H(f) = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^4 + 2 (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1^3 x_2 + \cdots$$

und bezeichnet man durch $a_0', a_1', \cdots$ die Coefficienten von H mit Binomialcoefficienten geschrieben, also

$$a_0' = a_0 a_2 - a_1^2, a_1' = \frac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2), \text{ u. s. f., so wird}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \end{vmatrix} = \frac{1}{36}(I_2^3 - 27 J_3^2) = \frac{1}{36} \varDelta,$$

wo I_2 die quadratische Invariante, J_3 die Invariante 3ten Grads, nämlich

$$I_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 \,, \; J_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} ,$$

also $\varDelta$ die Discriminante von f ist. Dies lässt sich leicht mittelst der canonischen Form von f verificiren. Das Verschwinden der Invariante $D_{f,\varphi}$ bedingt mithin, dass f eine Doppelwurzel hat. Der Doppelfaktor von f ist dann auch Doppelfaktor von H[1]). Berechnet man sodann die apolare Form ψ (7) von f und H, so ergibt sich, dass ψ geradezu die dritte Potenz desselben Faktors ist. Die Nenner der Coefficienten μ der Darstellung von f als Potenzsumme verschwinden in diesem Falle und die Entwicklung wird unmöglich.

1) Clebsch, „Binäre Formen" S. 162.

Sitzung vom 6. Februar 1892.

1. Herr A. v. Baeyer hält einen längeren Vortrag über seine in den letzten Jahren angestellten Untersuchungen „über die Reduktion der Benzolcarbonsäure". Dieselben gelangen anderwärts zur Veröffentlichung.

2. Herr C. v. Voit theilt die Resultate einer in seinem Laboratorium von Herrn Prof. J. Tsuboi aus Japan ausgeführten Untersuchung „über den Einfluss verschiedener Nahrungsmittel auf den Wassergehalt der Organe und den Hämaglobingehalt des Blutes" mit.

Ueber den Einfluss verschiedener Nahrungsmittel auf den Wassergehalt der Organe und den Hämaglobingehalt des Blutes.

Von Carl Voit.

(Eingelaufen 8. Februar.)

Schon vor mehr als dreissig Jahren habe ich die Beobachtung gemacht, dass ein Hund bei ausschliesslicher Fütterung mit Brod täglich Eiweiss von seinem Körper verliert, aber nicht entsprechend an Gewicht abnimmt; er musste daher bei dieser ungenügenden Nahrung Wasser angesetzt haben. Als das Thier darnach reichlich Fleisch erhielt, setzte es Eiweiss an und gab, unter Abnahme des Körpergewichtes, das vorher aufgespeicherte Wasser im Harn wieder ab. Diese Zurückhaltung von Wasser im Körper bei Fütte-

rung mit Brod haben später Pettenkofer und ich auch durch Respirationsversuche bestätigt.

Um die wichtige Thatsache, dass der Organismus bei der unvollkommenen Ernährung mit Brod wässriger wird, direkt darzuthun, habe ich damals zwei Katzen während längerer Zeit mit Brod gefüttert, einer dritten aber das gewöhnliche aus animalischen und vegetabilischen Nahrungsmitteln gemischte Futter verabreicht; die beiden ersteren enthielten darnach in der That im Muskel 2—5 %, im Gehirn 3—5 % Wasser mehr als die letztere.

Elf Jahre darauf wendete Herr V. Subbotin in meinem Laboratorium die damals von Preyer angegebene Methode der Bestimmung des Hämaglobins im Blute an, um bei verschiedener Nahrung den Gehalt an Hämaglobin im Blute von Kaninchen und Hunden zu ermitteln. Es zeigten sich dabei je nach der Art der Nahrung beträchtliche Unterschiede. Auch nach langem Hunger fand sich die gleiche Hämaglobinmenge wie bei der reichlichsten und besten Nahrung; anders jedoch gestaltete es sich bei ungenügender Nahrung. Die Kaninchen hatten bei Fütterung mit Heu die geringste Menge von Hämaglobin, etwas mehr bei Fütterung mit Kartoffeln oder mit Rüben und Kohl, am meisten bei Fütterung mit Brod; darnach schien der Hämaglobingehalt mit dem Eiweiss der Nahrung zuzunehmen. Beim Hunde trat der Einfluss der Art der Nahrung noch deutlicher hervor; nach Aufnahme von Fleisch oder von eiweissreichem Futter war die Hämaglobinmenge wesentlich höher als bei Zufuhr von viel stickstoffarmen Substanzen, besonders von Brod. Eine eiweissarme oder an stickstofffreien Stoffen, namentlich an Stärkemehl, reiche Nahrung bewirkt eine Abnahme des Hämaglobingehaltes, also diejenigen Nahrungsmittel, welche ein Wässrigwerden des ganzen Körpers hervorrufen.

Obwohl ich diese Dinge für völlig sichergestellt halte, so hatte ich doch Veranlassung, dieselben nochmals zu prüfen.

Ich bat daher Herrn Prof. J. Tsuboi aus Japan, der in meinem Laboratorium arbeitete, die diesbezüglichen Versuche anzustellen und an dem gleichen Thiere den Wassergehalt der Organe und die Hämaglobinmenge des Blutes zu ermitteln. Die letztere Bestimmung geschah mittelst des Vierordt'schen Verfahrens auf spektroscopischem Wege.

Zunächst wurden Versuche an drei Kaninchen angestellt. Eines (Nr. a) wurde mit Milch und Semmel unter Zusatz von etwas Heu gefüttert, ein zweites (Nr. b) mit viel Heu, ein drittes (Nr. c) mit Kartoffeln. Nr. a enthielt im Muskel 25,5 %, im Blut 20,0 % feste Theile und 11,58 % Hämaglobin; Nr. b im Muskel 19,9 %, im Blut 17,0 % feste Theile und 11,27 % Hämaglobin; Nr. c im Muskel 22,5 %, im Blute 14,4 % feste Theile und 7,94 % Hämaglobin. Bei der Aufnahme von Kartoffeln ist also die prozentige Hämaglobinmenge im Blute, sowie die prozentige Menge der festen Theile im Muskel und Blut wesentlich geringer als bei Aufnahme von Milch und Semmel.

Schlagend war das Resultat der Versuche mit zwei Katzen, von denen die eine (Nr. a) Fleisch mit Speck, die andere (Nr. b) Semmel mit etwas Fleischextrakt bekam. Die Katze Nr. a enthielt im Muskel 25,6 %, im Blut 19,9 % feste Theile und 10,97 % Hämaglobin; die Katze Nr. b im Muskel 23,9 %, im Blut 14,8 % feste Theile und 6,82 % Hämaglobin.

Zuletzt wurden noch drei Kaninchen mit Kartoffeln ernährt und dem einen (Nr. a) täglich 5 mg Ferrum reductum dazu gegeben, dem anderen (Nr. b) 15 ccm Blut, dem dritten (Nr. c) 30 ccm Blutserum. Bei dem Kaninchen Nr. a fanden sich im Muskel 17,7 %, im Blut 10,2 % feste Theile und 7,51 % Hämaglobin; bei dem Kaninchen Nr. b im Muskel 21,6 %, im Blut 11,5 % feste Theile und 7,27 % Hämaglobin; bei dem Kaninchen Nr. c im Muskel 23,2 %, im Blut 14,6 % feste Theile und 9,46 % Hämaglobin.

Die näheren Angaben über die Quantitäten der verzehrten und resorbirten Nahrungsstoffe, sowie über die Gewichtsverhältnisse der Thiere sollen mit eingehenden Betrachtungen in der Zeitschrift für Biologie zur Veröffentlichung gelangen.

Aus den berichteten Versuchen geht abermals hervor, dass die Zusammensetzung der Nahrung einen wesentlichen Einfluss auf den Wassergehalt der Organe und des Blutes und in Folge davon auch auf den Hämaglobingehalt des letzteren ausübt; denn der grössere Wassergehalt des ganzen Körpers und des Blutes und der geringere Hämaglobingehalt des letzteren stehen offenbar in Zusammenhang mit einander.

Es ist selbstverständlich nicht die Menge der Nahrung für sich allein oder der Eiweissgehalt derselben für sich allein das bestimmende hiefür, denn sonst müsste beim Hunger wo gar keine Nahrung und gar kein Eiweiss aufgenommen wird, die Hämaglobinmenge am geringsten sein, während wir doch selbst zuerst dargethan haben, dass dieselbe dabei so gross ist wie bei einer vorzüglichen Nahrung. Es ist vielmehr die ungenügende Zusammensetzung der Nahrnng, die zu geringe Menge von Eiweiss zugleich mit einem Ueberschuss an Stärkemehl, wie schon Subbotin andeutete, was den schädigenden Effekt hervorbringt. Wenn der Körper des Kaninchens nach Aufnahme gewisser pflanzlicher Nahrungsmittel wässriger wird und das Blut weniger Hämaglobin enthält als bei vollständigem Hunger, so kann doch nur die Zusammensetzung der Nahrung die Ursache sein.

Ich lege Werth auf diese Thatsache, da es mir durchaus nicht gleichgiltig erscheint, ob die denkbar beste Nahrung den menschlichen Körper in demselben stofflichen Zustande zurücklässt wie die schlechtest zusammengesetzte z. B. aus einem Uebermaass von Kartoffeln bestehende. Dass dies auch ganz unmöglich ist, geht schon aus dem schlechten Aussehen einer fast ausschliesslich von Kartoffeln sich nährenden Bevölkerung gegenüber einer sich reichlich ernährenden hervor.

Sitzung vom 5. März 1892.

1. Herr Hugo Seeliger legt eine Abhandlung des correspondirenden Mitgliedes der Akademie, Herrn Prof. Jac. Lüroth in Freiburg, vor: „über die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen."

2. Herr Ludwig Boltzmann spricht: „über das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher elektrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten."

3. Herr Leonhard Sohncke macht Mittheilung über eine in seinem Laboratorium ausgeführte Untersuchung des Herrn Dr. R. Emden: „über den Magnetismus des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen."

4. Herr Gustav Bauer bespricht die Resultate einer ihm von Herrn Dr. Hermann Brunn, Privatdozenten an der hiesigen Universität, übergebenen Arbeit; „über Verkettungen."

5. Herr Walter Dyck bringt eine Fortsetzung seiner Untersuchungen: „über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme (zweite Mittheilung)."

6. Herr Wilhelm v. Gümbel bespricht und überreicht: „Geologische Bemerkungen über die warme Quelle des Brennerbads und seine Umgebung."

Ueber die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen.

Von J. Lüroth in Freiburg i. Br.

(Eingelaufen 5. März.)

§ 1. Eine Betrachtung, die sich an die Berechnung einer Landesvermessung anschliesst und von der unten in § 16 noch weiter die Rede sein wird, legte mir die Behandlung der folgenden Aufgabe nahe.

Gegeben sind zwei stetige Flächenstücke F und F'. Durch jeden ihrer Punkte sei eine Linie, die Lothlinie des fraglichen Punktes gezogen. Der Punkt, zu dem die Lothlinie gehört, heisse der Fusspunkt der Lothlinie. Eine Ebene durch die Lothlinie eines Punktes werde Verticalebene dieses Punktes genannt.

Keine Lothlinie, weder von F noch von F' liege in der betreffenden Fläche. Die Richtung der Lothlinien von F und F' ändere sich stetig mit dem Fusspunkt.

Es sei weiter eine Abbildung $\mathfrak{A}$ gegeben, welche die Fläche F auf die F' so abbildet, dass deren Punkte sich gegenseitig eindeutig entsprechen. Damit ist dann auch ein Entsprechen der Lothlinien gegeben, indem zwei Lothlinien entsprechend heissen sollen, wenn ihre Fusspunkte durch $\mathfrak{A}$ sich zugeordnet sind.

Sind nun $A\,B\,C\,D\,E\ldots$ Punkte von F, $A'\,B'\,C'\,D'\,E'\ldots$ die entsprechenden Punkte von F', ist a die Loth-

linie in A, a' die in A', so soll endlich $\mathfrak{A}$ so beschaffen sein, dass die beiden Ebenenbüschel $a(B\,C\,D\,E\ldots)$ und $a'(B'\,C'\,D'\,E'\ldots)$ projectiv sind.

Die Beziehung

$$a(B\,C\,D\,E\ldots) \barwedge a'(B'\,C'\,D'\,E'\ldots)$$

soll gelten, wo auch die Punkte $A\,B\,C\,D\ldots$ auf F gelegen sein mögen.

Es soll die Natur der Abbildung $\mathfrak{A}$ bestimmt werden.

§ 2. Aus der projectiven Beziehung folgt sofort, dass wenn die Ebenen $a\,B$ und $a\,C$ zusammenfallen, auch die $a'\,B'$ und $a'\,C'$ identisch sein müssen und umgekehrt; also entsprechen Punkte von F, die irgend einer Verticalebene angehören, Punkten einer Verticalebene von F'. Vermöge $\mathfrak{A}$ kann in Folge dessen jetzt auch jeder Ebene ε, die in einem Punkte A von F Verticalebene ist, eine andere Ebene zugeordnet werden. Denn ist B ein Punkt der Schnittcurve von F und ε, entsprechen den Punkten A, B und der Lothlinie a in A, die Punkte A', B' und die Lothlinie a' in A', so kann man die Verticalebene $a'\,B'$ der $a\,B$ entsprechen lassen. Und diese Art der Zuordnung ist dann, dem eben gefundenen Resultate gemäss, nicht abhängig von der Wahl des Punktes B auf der Schnittcurve von ε mit F.

Gesetzt, es seien A und B zwei Punkte von F, deren Lothlinien a und b sich schneiden, sei es in einem endlichen oder in einem unendlich fernen Punkt. Sei C ein anderer Punkt von F in der Ebene $a\,b$. Weil B und C einer Verticalebene von A angehören, liegen B' und C' in einer Ebene durch a'. Und weil A und C auf einer Ebene durch b sich befinden, liegen A' und C' auf einer Ebene durch b'. Die drei Punkte $A'\,B'\,C'$ gehören folglich einer Ebene durch a' und einer durch b' an; liegen also $A'\,B'\,C'$ nicht in einer geraden Linie, so müssen jene beiden Ebenen zusammenfallen,

also a' und b' sich schneiden. Nehmen wir daher an, dass weder F noch F' gerade Linien enthalten, so folgt, dass wenn zwei Lothlinien von F sich schneiden, auch die entsprechenden von F' sich treffen.

§ 3. Für die weitere Untersuchung hat man nun verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Es ist erstens möglich, dass je zwei Lothlinien von F, und damit auch die von F', sich schneiden. Dann liegen die sämmtlichen Lothlinien von F entweder in einer Ebene oder sie gehen durch einen Punkt. Der erste Fall ist ausgeschlossen, weil er nur stattfinden könnte, wenn F selbst eine Ebene wäre, die die sämmtlichen Lothlinien enthielte, gegen unsere Voraussetzung, dass diese nicht in F liegen liegen sollen. Somit müssen alle Lothlinien von F durch einen Punkt A gehen und die von F' müssen durch einen Punkt A' gehen. A sei der eine Eckpunkt $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ eines homogenen Tetraedercoordinatensystems; die Kanten $x_1 = 0$ $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ mögen die Lothlinien der drei Punkte $C\,B\,A$ von F sein. Entsprechende Festsetzungen seien für F' getroffen, indem die Coordinaten mit $x_1'\,x_2'\,x_3'\,x_4'$ bezeichnet seien. Weil die beiden Büschel, deren Axen die Lothlinien $C\,A$ und $C'\,A'$ sind, projectiv bezogen sind, sind die Gleichungen von zwei sich entsprechenden Ebenen dieser Büschel

$$x_2 = \lambda\, x_1 \quad \text{und} \quad x_2' = c\,\lambda\, x_1$$

Für einen Punkt von F und den entsprechenden von F' muss also

$$\frac{x_2'}{x_1'} = c\,\frac{x_2}{x_1}$$

sein. Ebenso findet man für jene Punkte die Gleichungen

$$\frac{x_3'}{x_2'} = a\,\frac{x_3}{x_2} \qquad \frac{x_3'}{x_1'} = b\,\frac{x_3}{x_2}$$

Diese Gleichungen definiren eine projective Beziehung der beiden Strahlenbündel A und A' aufeinander. Ueber die Natur der beiden Flächen F und F' aber lässt sich nichts weiter ausmachen. Ist F gegeben, so kann F' jedes beliebige Flächenstück sein, das von den Strahlen des Bündels A' in nur je einem Punkte getroffen wird. Wenn dann $\mathfrak{A}$ einem Punkte P von F denjenigen Punkt P' von F' zuordnet, welcher aus F' von dem Strahl ausgeschnitten wird, der im Bündel A' dem Strahl PA entspricht, so sind alle oben dem $\mathfrak{A}$ auferlegten Bedingungen erfüllt.

§ 4. Es kann aber zweitens der Fall sein, dass nicht je zwei Lothlinien sich schneiden. Dann kann man zwei Lothlinien a und b von F finden, die sich nicht treffen. Wir nehmen a zur Axe $x_1 = 0$ $x_2 = 0$, b zur Axe $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ eines homogenen Systems von Tetraedercoordinaten, und die a, b entsprechenden Lothlinien a' und b' zu den Axen $x'_1 = 0$ $x'_2 = 0$ bezw. $x'_3 = 0$ $x'_4 = 0$ eines Systems der $x'_1\, x'_2\, x'_3\, x'_4$.

Wegen der projectiven Beziehung der Büschel mit den Axen a und a' muss der Ebene, deren Gleichung ist $x_2 - \lambda x_1 = 0$ die Ebene $x'_2 - \lambda\, p\, x'_1 = 0$ entsprechen. Für Punkte von F und ihre entsprechenden ist also

$$\frac{x'_2}{x'_1} = p\,\frac{x_2}{x_1}$$

was wir, $p = \frac{a_2}{a_1}$ gesetzt, in die beiden Gleichungen

$$x'_1 = l\, a_1\, x_1 \qquad x'_2 = l\, a_2\, x_2$$

auflösen können.

Ganz ähnlich ergeben sich die Beziehungen

$$x'_3 = m\, a_3\, x_3 \qquad x'_4 = m\, a_4\, x_4. \qquad 1)$$

Seien nun c und c' eine dritte, von a und b verschiedene, Lothlinie von F und ihre entsprechende von F'. Durch c legen wir die beiden von einander verschiedenen Vertical-

ebenen α, β und durch c' die α', β', die so gewählt seien, dass α' der α, β' der β entspricht. Die Gleichungen der Ebenen α' und β' seien bezw.

$$\alpha' \ldots \; \alpha_1' x_1' + \alpha_2' x_2' + \alpha_3' x_3' + \alpha_4' x_4' = \alpha'(x') = 0$$

$$\beta' \ldots \; \beta_1' x_1' + \beta_2' x_2' + \beta_3 x_3' + \beta_4' x_4' = \beta'(x') = 0,$$

die von α und β seien $\alpha(x) = 0$ $\beta(x) = 0$. Wegen der projectiven Beziehung der Büschel mit den Axen c und c' muss dann

$$\frac{\alpha'(x')}{\beta'(x')} = \frac{r}{s} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

sein. Setzt man hier die Werthe aus 1) ein und bezeichnet

$$\alpha_1' a_1 x_1 + \alpha_2' a_2 x_2 = A(x) \quad \alpha_3' a_3 x_3 + \alpha_4' a_4 x_4 = \mathbf{A}(x)$$

$$\beta_1' a_1 x_1 + \beta_2' a_2 x_2 = B(x) \quad \beta_3' a_3 x_3 + \beta_4' a_4 x_4 = \mathbf{B}(v)$$

so kommt

$$\frac{l\,A(x) + m\,\mathbf{A}(x)}{l\,B(x) + m\,\mathbf{B}(x)} = \frac{r}{s} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

$$l\{s\,A(x)\beta(x) - r\,\alpha(x)B(x)\} = m\{r\,\alpha(x)\mathbf{B}(x) - s\beta(x)\mathbf{A}(x)\}.$$

Mit Hilfe der Zeichen

$$\text{2)} \qquad \begin{aligned} S &= r\,\alpha(x)\,\mathbf{B}(x) - s\,\beta(x)\,\mathbf{A}(x) \\ T &= s\,A(x)\,\beta(x) - r\,\alpha(x)\,B(x) \end{aligned}$$

kann man also

$$l = \varrho S \qquad m = \varrho T$$

schreiben und findet dann in

$$\text{I.} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1' &= \varrho S x_1 \\ x_2' &= \varrho S x_2 \\ x_3' &= \varrho T x_3 \\ x_4' &= \varrho T x_4 \end{aligned} \right.$$

die Beziehung der Fläche F' auf F, wie sie durch die Abbildung $\mathfrak{A}$ gegeben ist. Diese Formeln sind aber auf Punkte

von F beschränkt. Sie stellen, allgemein betrachtet, eine birationale Raumtransformation vor, wie sie von Clifford, Cremona und Nöther untersucht worden sind, und zwar geben sie diejenige specielle Umformung, die Nöther auf Seite 570 seiner Arbeit im 3. Bande der Math. Annalen aufführt.

§ 5. Diese Formeln können illusorisch werden, wenn S oder T für die Punkte von F, oder gar identisch, verschwinden.

Wenn S identisch Null ist, so ist entweder $\mathfrak{A}(x)=0$ $\mathfrak{B}(x)=0$. Dann wären, weil a_3 und a_4 nicht Null sein können, α_3', α_4', β_3', β_4' alle Null und es enthielten die Functionen $\alpha'(x')$, $\beta'(x')$ nur x_1' und x_2', so dass c' mit a' zusammenfiele und dann auch c mit a. Oder es ist

$$\mathfrak{B}(x)=\frac{s}{r}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\mathfrak{A}(x)$$

also, weil $\beta(x)$ zu $\alpha(x)$ prim ist, $\mathfrak{A}(x)$ durch $\alpha(x)$ theilbar, $\mathfrak{A}(x)\equiv c_0\,\alpha(x)$ und $\mathfrak{B}(x)\equiv\frac{s}{r}\,c_0\,\beta(x)$, wo c_0 constant. Dann würden α und β für $x_3=0$, $x_4=0$ verschwinden, d. h. c fiele mit b zusammen, gegen die Annahme. Also kann S nicht identisch $=0$ sein. Wenn es aber bedingt, für die Punkte von F, verschwindet, so ist F ein Stück der Fläche zweiter Ordnung S, deren Gleichung $S=0$ ist. Würde S nicht zerfallen, so wäre sie durch F vollständig bestimmt und könnte von der Wahl der Lothlinien a, b, c nicht abhängen. Weil aber für c die Functionen α und β Null sind, liegt c auf der Fläche S, und weil c ganz beliebig ist, müssten dann alle Lothlinien der Fläche S angehören, was nicht möglich ist, weil die Lothlinien eines Flächentheils einen Raumtheil erfüllen und S dann identisch Null wäre. Wenn aber S zerfiele, so könnte es nur aus zwei Ebenen bestehen, und F wäre ein Stück von einer derselben, was

auch ausgeschlossen ist. Daher ist S nicht $= 0$; Aehnliches gilt für T, das auch weder identisch noch bedingt Null sein kann. Die durch die Gleichungen I dargestellte Abbildung kann folglich nicht illusorisch werden.

§ 6. Es empfiehlt sich jetzt, zuerst den Fall zu betrachten, dass man c so annehmen kann, dass es sowohl a wie b schneidet. Dann kann man für die beiden Ebenen $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ die ac und bc nehmen, und deren Gleichungen bezw.

$$x_1 = 0 \qquad x_3 = 0$$

schreiben. Diesen beiden Ebenen entsprechen dann die beiden $a' c'$ und $b' c'$, so dass man

$$\alpha' = x_1' \qquad \beta' = x_3'$$

setzen kann. Damit wird

$$A(x) = a_1 x_1 \qquad B(x) = 0 \qquad \mathcal{A}(x) = 0 \qquad \mathbf{B}(x) = a_3 x_3$$

$$S = r\, a_3\, x_1\, x_3 \qquad T = s\, a_1\, x_1\, x_3$$

und die Formeln I des § 4 geben, wenn man $\sigma = \varrho\, x_1\, x_3$ nimmt,

$$x_1' = \sigma r a_3 x_1, \; x_2' = \sigma r a_3 x_2, \; x_3' = \sigma s a_1 x_3, \; x_4' = \sigma s a_1 x_4.$$

Diese Formeln stellen eine projective Transformation vor.

Kann man also drei Lothlinien finden, von welchen zwei die dritte schneiden, ohne in einer Ebene zu liegen, so ist die Abbildung $\mathfrak{A}$ eine projective.

§ 7. Im Folgenden nehmen wir nun, $\mathfrak{A}$ sei nicht projectiv und zeigen, dass diese Annahme auf unzulässige Resultate führt.

Wenn es nicht möglich ist, c so zu finden, dass es beide Lothlinien, a und b trifft, so gibt es entweder gar keine Lothlinie, die a oder b trifft, oder es gibt Lothlinien, die eine dieser beiden schneiden. In diesem letzten Falle können nun entweder je zwei der Lothlinien, die a begegnen,

auch sich gegenseitig schneiden, oder es gibt Paare, deren Linien a schneiden, ohne sich zu treffen.

Wenn diese letztere Möglichkeit einträfe, so wäre nach § 6 $\mathfrak{A}$ projectiv. Im ersten Falle müssten a und alle Lothlinien, die a treffen, entweder in einer Ebene liegen, oder durch einen Punkt gehen. Der Ort G der Fusspunkte wäre also ein Curvenstück oder höchstens ein Flächentheil, der von F verschieden ist, wenn wir den in § 3 absolvirten Fall ausschliessen. Aehnliche Verhältnisse treten bei b ein. Der Ort H der Fusspunkte der Lothlinien, die b treffen, ist auch eine Curve oder höchstens ein Flächentheil, wenn nicht die Abbildung $\mathfrak{A}$ projectiv ist. Wenn G und H zusammen F ausfüllten, würde, weil a und b sich nicht schneiden, nicht an allen Punkten, wo G und H aneinander grenzen, Stetigkeit in der Richtung der Lothlinien stattfinden können. Da wir diese angenommen haben, muss es sicher auch einen Flächentheil K von F geben, dessen Punkte weder G noch H angehören. Die Lothlinien, deren Fusspunkte auf K liegen, schneiden dann weder a noch b. Aus ihnen sei nun die in den Formeln I § 4 benutzte Lothlinie c gewählt; dann müssen $\alpha(x)$, wie $\beta(x)$ jedenfalls mindestens eine Variable des Paares $x_1\, x_2$ und mindestens eine des Paares $x_3\, x_4$ enthalten, weil sonst c die Linie b bezw. a schneiden würde.

Unter den Lothlinien, deren Fusspunkte K angehören, gibt es unendlich viele, die c nicht treffen. Denn eine Ueberlegung, die der im Anfang des § angestellten analog ist, zeigt, dass die Fusspunkte der c schneidenden Lothlinien einen Flächentheil L höchstens erfüllen können und dass sie durch einen Punkt gehen müssen, wenn $\mathfrak{A}$ nicht projectiv ist. Wenn L mit K identisch wäre, hätten wir an den Grenzen von K und G, sowie von K und H Unstetigkeiten der Richtungen der Lothlinien. Daher muss nach Abzug von L aus K noch ein Flächentheil M übrig bleiben, dessen Lothlinien c nicht treffen.

§ 8. Die weitere Untersuchung zerfällt in mehrere Theile.

Die Abbildung 𝔄 der Fläche F auf F' kann von der besonderen Wahl des Coordinatensystems und besonders der Lothlinie c nicht abhängen. Nehmen wir also für c eine andere Lothlinie d, die ebenfalls weder a noch b trifft, so werden sich die Functionen S und T in andere U und V verwandeln und die Formeln

$$x_1' = \varrho' U x_1, \quad x_2' = \varrho' U x_2, \quad x_3' = \varrho' V x_3, \quad x_4' = \varrho' V x_4$$

werden also ebenfalls die Abbildung 𝔄 darstellen müssen, d. h. sie werden für die Punkte von F dasselbe geben müssen, wie die Formeln I. Dies verlangt, dass

$$\text{II.} \qquad \Phi = UT - VS = 0$$

sei für die Punkte von F. Der Ausdruck Φ kann aber auch identisch Null sein.

§ 9. Betrachten wir zuerst diesen Fall. Dann muss, da ja ein identisches Verschwinden von S und T, wie auch von U und V nach § 5 ausgeschlossen ist,

$$\text{III.} \qquad V = \frac{UT}{S}$$

ganz sein. Ist T prim zu S, so muss U durch S theilbar und der Quotient, weil U und S von gleicher Dimension — der zweiten — sind, constant $= k$ sein. Dann hat man also $U = kS$, $V = kT$. Wie S und T für die Lothlinie c verschwinden, werden U und V für d zu Null. Den letzten Gleichungen zu Folge würde aber die Linie d gleichzeitig auch den beiden Flächen $S = 0$ und $T = 0$ angehören, die schon c gemein haben. Da aber diese beiden Flächen von der zweiten Ordnung sind, können sie, wenn sie nicht einen Flächentheil gemein haben — und dann wären S und T nicht theilerfremd — höchstens noch in einer Geraden sich

schneiden, die c nicht trifft und die natürlich von a, b und c abhängen wird. Da aber (§ 7) d noch unter unendlich vielen Lothlinien gewählt werden kann, die c nicht treffen, kann man sie immer von jener Linie verschieden annehmen. Somit ist der Fall nicht möglich; die Gleichung II kann nicht identisch bestehen, wenn S und T theilerfremd sind, sondern höchstens, wenn sie einen gemeinsamen Theiler haben.

§ **10.** Sind S und T nicht relativ prim, so können sie einen Factor ersten oder einen zweiten Grades gemein haben. Im letzten Falle muss $T = \mu S$ sein, wo μ eine Constante. Dann aber geben die Formeln I

$$x_1' = \varrho S \cdot x_1 \quad x_2' = \varrho S \cdot x_2 \quad x_3' = \varrho S \cdot \mu x_3 \quad x_4' = \varrho S \cdot \mu x_4,$$

die eine projective Transformation liefern.

Es können aber S und T auch einen gemeinsamen Factor ersten Grades τ haben, so dass $S = \tau S_1$, $T = \tau T_1$ ist. Dann müssten die beiden Functionen S und T zerfallen. Soll S zerfallen, so muss, weil $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ nur x_3 und x_4 enthalten, einer der beiden Factoren eine Function nur von diesen beiden Variabeln sein, die wir $m x_3 - l x_4$ setzen wollen. Dann müsste S für $x_3 = l$ $x_4 = m$ verschwinden, oder, wenn wir $\mathcal{A}(l, m) = g$, $\mathcal{B}(l, m) = f$ setzen

$$r f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + l \alpha_3 + m \alpha_4) = s g(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + l \beta_3 + m \beta_4),$$

somit auch

$$r f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = s g(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

sein. Nach einer Bemerkung in § 7 können die beiden hier vorkommenden Functionen nicht Null sein. Ist nun weder f noch g Null, so folgt, dass für $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ die Functionen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ verschwinden, dass also c und b sich schneiden. Wäre $f = 0$, so müsste auch $g = 0$ sein, weil $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ nicht identisch Null sein kann. Danach ist jene Gleichung möglich, wenn f und g gleich-

zeitig Null sind, in welchem Falle $\mathfrak{B}$ sich nur durch einen constanten Factor von $\mathfrak{A}$ unterscheiden kann, so dass es $= \mathfrak{A} h$ gesetzt werden kann. Damit wird

$$S = \mathfrak{A}(r h \alpha - s \beta).$$

In ähnlicher Weise kann T nur zerfallen, wenn $B(x) = k A(x)$ also

$$T = A(s\beta - r k \alpha)$$

ist. Beide müssen aber einen Factor gemein haben. Dass er in $\mathfrak{A}$ und A aufgehe, ist ausgeschlossen, weil diese Functionen verschiedene Variabeln enthalten. Dass $\mathfrak{A}$ mit $s\beta - rk\alpha$ proportional ist oder A mit $rh\alpha - s\beta$ ist auch unmöglich, weil sonst c die Linie b oder die a schneiden würde. Also wäre nur möglich, dass $rh\alpha - s\beta$ durch $s\beta - r\alpha k$ theilbar ist; der Quotient muss dann -1, und $h = k$ sein. Dann wäre also

$$S = \mathfrak{A}(r h \alpha - s\beta)$$
$$T = -A(r h \alpha - s\beta).$$

Die Gleichung III in § 9 würde

$$V = -\frac{U A}{\mathfrak{A}}$$

verlangen. Da A und $\mathfrak{A}$ theilerfremd sind, müssen U und V ebenfalls einen gemeinsamen Factor ersten Grades haben. Wenn man die vorigen Ueberlegungen nun auf U und V anwendet, so zeigt sich, dass diese Functionen die Formen

$$U = \Gamma(t n \gamma - u \delta)$$
$$V = -C(t n \gamma - u \delta)$$

haben müssen und dass dann

$$C = \frac{\Gamma A}{\mathfrak{A}}$$

sein muss, wobei $\gamma = 0$ $\delta = 0$ zwei Ebenen durch d darstellen

und C, Γ an die Stelle von A und $\mathcal{A}$ treten, wenn man c durch d ersetzt. Die letzte Gleichung gibt aber

$$\Gamma = v\,\mathcal{A} \qquad C = v\,A,$$

wo v ein constanter Factor. Aus der ersten dieser beiden

$$\gamma_3' a_3 x_3 + \gamma_4' a_4 x_4 = v(\alpha_3' a_3 x_3 + \alpha_4' a_4 x_4)$$

folgt aber $\gamma_3' = \alpha_3' v$, $\gamma_4' = \alpha_4' v$ und aus der zweiten $\gamma_1' = \alpha_1' v$, $\gamma_2' = \alpha_2' v$. Beide zusammen ergeben daher

$$\gamma'(x') = v\,\alpha'(x').$$

Es ist aber $\gamma'(x') = 0$ eine Ebene durch die Linie d', $\alpha'(x') = 0$ eine Ebene durch c'; daher sagt die letzte Gleichung aus, dass c' und d', also auch c und d sich schneiden, was durch Wahl von d nach § 8 stets vermieden werden kann.

Die Gleichung II kann also auch dann nicht identisch bestehen, wenn S und T einen Factor ersten Grades haben. Haben sie einen Factor zweiten Grades, ist also $\mathfrak{A}$ projectiv, so ist die Betrachtung jener Gleichung überhaupt unnöthig.

§ 11. Die Gleichung II kann aber vielleicht nur bedingt, für die Punkte von F, bestehen.

Ist $\Phi = 0$ die Gleichung einer unzerlegbaren Fläche vierter Ordnung Φ, so ist sie durch das Flächenstück F vollständig bestimmt und kann von der Wahl der Lothlinien $a\,b\,c\,d$ nicht abhängen. Da aber S und T für c, U und V für d, S und U für b, T und V für a verschwinden, so gehören diese Linien Φ an. Die Betrachtung von § 7 zeigt jedoch, dass die Lothlinie a ganz beliebig gewählt werden kann. Läge sie auf Φ, so müssten alle Lothlinien auf Φ liegen. Dann aber müsste die Function Φ, gegen die hier gemachte Annahme, identisch Null sein, weil die Lothlinien eines Flächentheils einen Raumtheil erfüllen. Daher muss die Function Φ zerfallen, entweder in einen Factor dritten Grades Φ_3, der nicht weiter zerfällt, und einen Factor ersten

Grades Φ_1, oder in einen unzerlegbaren Factor zweiten Grades Φ_2 und einen andern Factor zweiten Grades Φ_2'.

Im ersten Falle muss F, weil es nicht Theil einer Ebene sein soll, der Fläche dritter Ordnung $\Phi_3 = 0$ angehören, die durch F vollständig bestimmt ist, weil sie unzerlegbar sein soll, und von der Wahl der Linien a b c d nicht abhängen kann. Jede Linie, die auf Φ liegt, muss nun entweder auf der Fläche dritter Ordnung oder auf der Ebene liegen. Läge a auf Φ_3, so würden, weil a beliebig, alle Lothlinien dieser Fläche angehören, also Φ identisch Null sein. Daher muss a auf Φ_1 liegen. Die Lothlinie b kann aber auch nicht auf Φ_3 liegen. Denn ihr Fusspunkt kann (§ 7) jeder Punkt des Flächentheils G' sein, der übrig bleibt, wenn man G von F wegnimmt. Wenn b auf Φ_3 läge, so müssten alle Lothlinien von G' auf Φ_3 liegen, daher die Function Φ_3 und damit auch Φ identisch Null sein.

Die beiden Lothlinien a und b können aber auch nicht auf Φ_1 liegen, weil sie sich nicht schneiden. Daher ist ein Zerfallen von Φ in dieser Weise nicht möglich. Zerfällt es aber in zwei Factoren zweiten Grades, so ist nur der Fall zu betrachten, dass F dem irreducibelen Factor Φ_2 angehört, der dann von der Wahl der Lothlinien a b c d nicht abhängen könnte. Lägen nun c oder d auf Φ_2, so müsste, weil c und d beliebige Lothlinien aus K sind, alle Lothlinien dieses Flächentheils auf Φ_2 liegen, und dies ist nicht möglich. Daher können jene beiden Lothlinien nur auf Φ_2' liegen. Keine der Lothlinien a oder b kann aber Φ_2 angehören. Läge a auf Φ_2, so lägen alle Lothlinien auf dieser Fläche; läge b auf ihr, so würde das Gleiche von allen Lothlinien von G' gelten. Somit liegen die vier Lothlinien a b c d auf einer und derselben Fläche zweiter Ordnung $\Phi_2' = 0$, die nicht zerfallen kann, weil sonst c sicher a oder b treffen müsste. Daher gehören je zwei Lothlinien von K mit a und b derselben Fläche zweiter Ordnung an.

Sind d, e, f, g .... andere Lothlinien, deren Fusspunkte auf K liegen, so gehören also $abcd$, $abce$, $abcf$, $abcg$, ... je derselben Fläche zweiter Ordnung an. Weil diese aber die drei windschiefen Geraden abc gemein haben, fallen sie zusammen, so dass alle Lothlinien aus K der nämlichen Fläche zweiter Ordnung angehören müssten, was nicht eintreten kann. Folglich kann die Gleichung II auch nicht bedingt, für die Punkte von F, erfüllt sein.

Ueberblickt man die gefundenen Resultate, so zeigt sich, dass keine Möglichkeit bleibt, als dass die Abbildung $\mathfrak{A}$ projectiv ist.

§ 12. Diese projective Umformung gilt zunächst nur für die Punkte von F. Man kann sie aber auch auf die Punkte, Geraden und Ebenen im Raume anwenden und in dieser allgemeineren Weise sei sie mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}$ zunächst nur für die Punkte von F.

Sei nun ε eine Verticalebene von F; A, B, C drei in ihr gelegene Punkte von F. Dann gehen diese durch $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{T}$ in A', B', C' über, die in der Ebene $\mathfrak{A}\varepsilon$ gelegen sind, die ε durch $\mathfrak{A}$ nach § 1 zugeordnet ist. Da aber vermöge $\mathfrak{T}$ aus ε wieder eine Ebene $\mathfrak{T}\varepsilon$ hervorgeht, welche die drei Punkte A', B', C' enthalten muss, so muss $\mathfrak{T}\varepsilon = \mathfrak{A}\varepsilon$ sein, weil ja nach unserer Annahme F' keine geraden Linien enthalten soll. Da weiter zwei Verticalebenen desselben Punktes sich in der Lothlinie des Punktes schneiden, so folgt, dass auch die Lothlinien von F durch die Transformation $\mathfrak{T}$ in die von F' übergehen, so dass also Punkte, Ebenen und Geraden, die sich vermöge $\mathfrak{A}$ entsprechen, auch durch $\mathfrak{T}$ aus einander hervorgehen.

§ 13. Nimmt man an, man hätte durch ein gehörig dichtes Netz von Messungen auf einer unbekannten Fläche F' mit einem nicht bekannten System von Lothlinie Σ' die Ueberzeugung gewonnen, dass sie sich auf einer bekannten

Fläche F in der im § 1 geschilderten Art abbilden lasse, wenn man die Lothlinien von F, deren System Σ sei, passend annimmt, so kann man also schliessen, dass F' und Σ' durch projective Umformung aus F und Σ hervorgeht. Da aber die gegenseitige Lage der Punkte und Lothlinien von F' nicht bekannt ist, ist man auch nicht im Stande, die Beziehung $\mathfrak{T}$ von F auf F' zu finden. Es kann vielmehr F' jede Fläche sein, die durch irgend eine derartige Umformung der F entspricht, so dass sich über die Gestalt von F' nichts weiter aussagen lässt, wenn über die Art der projectiven Beziehung zwischen entsprechenden Büscheln von Verticalebenen nichts weiter bekannt ist.

§ 14. Anders gestaltet sich dies in dem speciellen Falle, den wir von jetzt ab in's Auge fassen wollen.

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ erfülle die Bedingungen des § 1 mit der Modification, dass der Winkel zwischen zwei beliebigen Verticalebenen irgend eines Punktes von F, dem Winkel zwischen den entsprechenden Verticalebenen von F' gleich sei. Diese Voraussetzung schliesst die in § 1 gemachte über die projective Beziehung entsprechender Büschel von Verticalebenen ein. Die Transformation $\mathfrak{T}$ lässt sich dann finden, wenn man die Lothlinien von F zu Hilfe nimmt. Denn sei a eine Lothlinie von F, seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ Ebenen durch a, a' die entsprechende Lothlinie von F' und $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon' \ldots$ die entsprechenden Verticalebenen. Ist ferner ω der unendlich ferne Kugelkreis und sind λ, μ die beiden durch a an ω zu legenden Tangentenebenen, die wir die Hauptebenen der Linie nennen wollen, λ', μ' die Hauptebenen von a', so ist der Winkel zwischen α und β gegeben durch $\frac{1}{2i} l(\lambda \mu \alpha \beta)$ und der zwischen α' und β' durch $\frac{1}{2i} l(\lambda' \mu' \alpha' \beta')$, wo ein Symbol wie $(\alpha \beta \gamma \delta)$ das Doppelverhältniss der vier Ebenen $\alpha \beta \gamma \delta$ be-

zeichnet. Wegen der Gleichheit der Winkel zwischen entsprechenden Ebenen muss dann $(\lambda \mu \alpha \beta) = (\lambda' \mu' \alpha' \beta')$ sein. Weiter erfordert die Winkelgleichheit die Gleichungen $(\lambda \mu \alpha \gamma) = (\lambda' \mu' \alpha' \gamma')$, $(\lambda \mu \alpha \delta) = (\lambda' \mu' \alpha' \delta') \ldots$, die zusammen

$$\lambda \mu \alpha \beta \gamma \delta \ldots \barwedge \lambda' \mu' \alpha' \beta' \gamma' \delta' \ldots$$

liefern. Da $\mathfrak{T}$ projectiv ist, ist es auch die umgekehrte Transformation $\mathfrak{T}^{-1}$; wenn man diese auf $\lambda' \mu' \alpha' \beta' \ldots$ anwendet und $\mathfrak{T}^{-1} \lambda' = \lambda_1$, $\mathfrak{T}^{-1} \mu' = \mu_1$ setzt, folgt, dass $\lambda' \mu' \alpha' \beta' \gamma' \delta' \ldots \barwedge \lambda_1 \mu_1 \alpha \beta \gamma \delta \ldots$ und also auch $\barwedge \lambda \mu \alpha \beta \gamma \delta \ldots$ sein muss. Daher müssen die Ebenen $\lambda_1 \mu_1$ mit $\lambda \mu$ identisch sein. Da aber $\lambda' \mu'$ die von a' an ω zu legenden Tangentenebenen sind und a' durch $\mathfrak{T}^{-1}$ in a übergeht, werden $\lambda_1 \mu_1$ die beiden Tangentenebenen sein, welche man von a aus an den Kegelschnitt Ω legen kann, der aus ω durch die Umformung $\mathfrak{T}^{-1}$ hervorgeht. Die Lothlinie a hat somit die Eigenschaft, dass von ihr zwei Ebenen ausgehen, die gleichzeitig ω und $\mathfrak{T}^{-1} \omega = \Omega$ berühren (Vgl. Sturm Math. Annalen Bd. 28 Seite 263/64 Nr. 5). Ist demnach $\mathfrak{T}$ gegeben, so ist auch die Richtung der Lothlinie in jedem Punkte von F bestimmt (und zwar zweideutig). Nur dann ist diese Richtung willkürlich, wenn $\Omega = \omega$ ist, was eintritt, wenn $\mathfrak{T}$ eine Aehnlichkeitstransformation ist.

§ 15. Umgekehrt, wenn in den Punkten von F die Lothlinien bekannt sind, so ist $\mathfrak{T}$ bestimmt. Denn die Hauptebenen der Lothlinien müssen einen Kegelschnitt Ω berühren, und da F' in der Eingangs erwähnten Beziehung zu F steht, muss auch ein solcher Kegelschnitt existiren, der freilich entweder ω selbst ist, oder von ω verschieden sein kann. Man habe nun entweder I. gefunden, dass die sämmtlichen Hauptebenen der Lothlinien keinen anderen Kegelschnitt als ω berühren, oder II. erkannt, dass sie einen anderen berühren und diesen bestimmt.

Im Falle I ist $\Omega = \mathfrak{T}^{-1}\,\omega = \omega$, daher $\mathfrak{T}$ eine Aehnlichkeitstransformation, F' ist zu F ähnlich.

Im Falle II nehmen wir eine Lothlinie a zur Axe $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ eines homogenen rechtwinkeligen Systems, den Fusspunkt A von a zum Ursprung. Die entsprechenden Gebilde A', a' nehmen wir zum Ursprung und zur Axe $x'_1 = 0$ $x'_2 = 0$ eines zweiten homogenen rechtwinkeligen Systems, dessen Ebenen $x'_1 = 0$ $x'_2 = 0$ den $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ bezw. entsprechen mögen. Bezeichnen wir die homogenen Ebenencoordinaten des ersten Systems mit $u_1\,u_2\,u_3\,u_4$, die des zweiten mit $u'_1\,u'_2\,u'_3\,u'_4$, beachten, dass $\mathfrak{T}$ eine Ebene durch A in eine durch A' überführt, und, wegen der Winkelgleichheit, die Ebene $x_2 = \lambda\,x_1$ in die $x'_2 = \lambda\,x'_1$ übergehen muss, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho\,u'_1 &= \alpha\,u_1 + \gamma\,u_3 + \delta\,u_4\\
\varrho\,u'_2 &= \alpha\,u_2 + \varepsilon\,u_3 + \zeta\,u_4\\
\varrho\,u'_3 &= \vartheta\,u_3 + \eta\,u_4\\
\varrho\,u'_4 &= \varkappa\,u_4.
\end{aligned}$$

Die Gleichung von ω im ersten System ist

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

und im zweiten

$$u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3 = 0.$$

Daher ist die Gleichung von $\mathfrak{T}^{-1}\,\omega = \Omega$

$$\begin{aligned}
0 = \alpha^2\,(u_1^2 + u_2^2) + (\gamma^2 + \varepsilon^2 + \vartheta^2)\,u_3^2 + (\delta^2 + \zeta^2 + \eta^2)\,u_4^2\\
+ 2\,\alpha\,\gamma\,u_1\,u_3 + 2\,\alpha\,\delta\,u_1\,u_4 + 2\,\alpha\,\varepsilon\,u_2\,u_3 + 2\,\alpha\,\zeta\,u_2\,u_4\\
+ 2\,(\gamma\,\delta + \varepsilon\,\zeta + \vartheta\,\eta)\,u_3\,u_4.
\end{aligned}$$

Man kann stets $\alpha = 1$ setzen. Ist Ω gefunden und $\Sigma a_{ik}\,u_i\,u_k = 0$ seine Gleichung, so müssen die von a ausgehenden Hauptebenen, deren Coordinaten $u_1 = i$ $u_2 = 1$ $u_3 = u_4 = 0$ und $u_1 = -\,i$ $u_2 = 1$ $u_3 = u_4 = 0$ sind, diese Gleichung erfüllen, woraus $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ sich ergibt.

Nimmt man an, es sei $a_{11} = a_{22} = 1$ gemacht, so gibt die Vergleichung der Coefficienten

$$\gamma = a_{13} \quad \delta = a_{14} \quad \varepsilon = a_{23} \quad \zeta = a_{24}$$
$$\vartheta^2 = a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2$$
$$\eta^2 = a_{44} - a_{14}^2 - a_{24}^2$$
$$\vartheta\,\eta = a_{34} - a_{13}\,a_{14} - a_{23}\,a_{24}$$

Die letzte Gleichung bestimmt die Combination der Zeichen von ϑ und η; sie ist erfüllt, denn sie drückt aus, wie man leicht sieht, dass die Determinante von Ω Null ist. Man hat also zwei Möglichkeiten, je nachdem man, unter $\vartheta_0\,\eta_0$ ein Werthsystem von ϑ, η verstanden,

$$\varrho\, u_3' = \vartheta_0\, u_3 + \eta_0\, u_4$$

oder

$$\varrho\, u_3' = -\vartheta_0\, u_3 - \eta_0\, u_4$$

nimmt. Die zweite Formel geht in die erste über, wenn man den Sinn der x_3' Axe umkehrt, was mit einer Spiegelung an der Ebene $x_3' = 0$ übereinkommt. Abgesehen von dieser Spiegelung ist also $\mathfrak{T}$ durch Ω eindeutig bestimmt und folglich kann man dann F' und Σ' aus F und Σ ableiten.

§ 16. Man könnte von dem gewonnenen Resultate, wenigstens der Idee nach, eine Anwendung machen auf die Bestimmung der Gestalt eines Theiles der Erdoberfläche aus geodätischen Messungen. In der That liefern ja diese, von Basismessungen abgesehen, die Winkel zwischen den Verticalebenen eines Punktes. Wenn man dann, etwa durch Probiren, ein Modell F hergestellt hätte mit einem System Σ von Lothlinien, für das die Winkel der Verticalebenen ebenso gross wären, wie die auf der Erde beobachteten, so wäre man im Stande, die Beziehung der Gestalt der Erde zu diesem Modell anzugeben.

In der Praxis freilich geht dies nicht an. Bei der geringen Neigung gegen einander, welche die Lothlinien von

Punkten haben, die noch gegenseitig sichtbar sind, erweisen sich die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, insbesondere auch die von der Seitenrefraction herrührenden, als von zu bedeutendem Einfluss.

Man benutzt daher die gemessenen Winkel in anderer Weise. Man projicirt die Orte von der physischen Erdoberfläche auf die mathematische Erdoberfläche, das Geoid, durch Linien, welche Normalen zur Geoidfläche sind, und berechnet dann aus den beobachteten Winkeln zwischen den Verticalebenen der physischen Erdoberfläche, die Winkel, die die Normalebenen des Geoids zeigen würden, indem man die Höhen der Punkte über dem Geoid anderweitig, etwa nivellitisch, bestimmt. Als Lothlinien der Geoidfläche benützt man dann ihre Normalen und bildet sie auf eine „Referenzfläche“ — gewöhnlich das Bessel'sche oder Clarke'sche Ellipsoid — ab, indem man als Lothlinien der Referenzfläche deren Normalen verwendet. Man bestimmt nämlich die Coordinaten der Punkte auf der Referenzfläche so, nöthigenfalls mit Benutzung der Methode der kleinsten Quadrate, dass die Horizontalwinkel auf der Referenzfläche, d. h. die Winkel zwischen deren Normalschnitten, mit den beobachteten und auf das Geoid reducirten Horizontalwinkeln möglichst übereinstimmen. Und da zeigt es sich, dass, wenn die Ausdehnung des betrachteten Theils des Geoids ein Paar Hundert Kilometer nicht überschreitet, die Differenzen zwischen den Horizontalwinkeln auf dem Geoid und auf der Referenzfläche so gering sind, dass man sie den Beobachtungsfehlern zuschreiben kann.

§ 17. Nehmen wir nun an, die genannte Abbildung erfülle die im § 14 aufgestellte Bedingung strenge.

Indem wir unter F ein beliebiges Flächenstück verstehen und als Lothlinien ihre Normalen annehmen, sowie Gleiches von F' voraussetzen, wollen wir nun die Art der

Abbildung $\mathfrak{T}$ in diesem Falle weiter studieren. Diese muss hier noch eine Bedingung erfüllen. Da sie die Lothlinien von F, in die Lothlinien von F', die Normalen dieser Fläche sein sollen, überführen muss, so muss $\mathfrak{T}$ aus einer beliebigen Normalen n von F, eine n' von F', hervorgehen lassen. Ist τ die Tangentenebene von F im Fusspunkte von n, τ' die von F' im Fusspunkt von n', die vermöge $\mathfrak{T}$ der τ entspricht, so geht n durch den Pol von τ in Bezug auf ω, und n' durch den Pol von τ' in Bezug auf ω. Wendet man $\mathfrak{T}^{-1}$ an und beachtet, dass eine projective Umformung das Verhältniss von Pol und Polarebene nicht ändert, so folgt, dass $\mathfrak{T}^{-1} n'$ durch den Pol von $\mathfrak{T}^{-1} \tau'$ in Bezug auf $\mathfrak{T}^{-1} \omega$, somit n durch den Pol von τ in Bezug auf Ω gehen muss. Die Normale n muss daher die Pole von τ in Bezug auf ω und Ω enthalten.

Die Transformation $\mathfrak{T}_{\bullet}$ führt also in unserem Falle die Fläche F mit ihrem Normalensystem in eine andere Fläche mit ihrem Normalensystem über und bildet zugleich F conform ab. Man könnte somit die vorliegende Aufgabe lösen, indem man zu einer gegebenen Transformation $\mathfrak{T}$ die Flächen bestimmte, welche die erste Eigenschaft haben und die mit der zweiten Eigenschaft und nun diejenige Beschaffenheit von $\mathfrak{T}$ suchte, für welche es Flächen gibt, die beiden Systemen gemeinsam sind. Die Flächen zu finden, welche durch $\mathfrak{T}$ conform abgebildet werden, ist mir nicht gelungen. Dagegen gestaltet sich die Behandlung der andern Aufgabe einfach, indem man die Flächen sucht, für welche die Pole einer Tangentenebene τ in Bezug auf ω und Ω mit dem Berührungspunkt in einer Geraden liegen.

Ist nämlich $F(u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$ die Gleichung der Fläche in homogenen Ebenencoordinaten (sie brauchen nicht rechtwinkelig zu sein) und sind $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4$ die Coordinaten von τ, bezeichnet man ferner bei einer homogenen Function f der

$u, \frac{\partial f}{\partial u_i}$ mit $f_i(u)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ und $\sum_1^4 f_i(u) v_i$ mit $f(u, v)$, so sind die Coordinaten des Berührungspunktes von τ $F_i(\tau)$ (i, wie immer $= 1, 2, 3, 4$), die des Poles von τ in Bezug auf ω und Ω bezw. $\omega_i(\tau)$ und $\Omega_i(\tau)$, wenn $\omega = 0$ und $\Omega = 0$ die Gleichungen dieser Kegelschnitte in den homogenen Ebenen coordinaten sind. Somit muss sein

$$F_i(\tau) = h\,\omega_i(\tau) + k\,\Omega_i(\tau)$$

woraus folgt, weil $F(\tau\,\tau) = 0$ ist,

$$0 = h\,\omega(\tau) + k\,\Omega(\tau),$$

so dass

$$F_i(\tau) = h\left\{\omega_i(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\Omega(\tau)} \cdot \Omega_i(\tau)\right\}$$

wird. Bestimmt man nun die Differentiale $d\tau_i$ so, dass die Gleichung $F = 0$ erfüllt bleibt, dass also $F(\tau, d\tau) = 0$ ist, so folgt, dass

$$0 = \omega(\tau, d\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\Omega(\tau)}\Omega(\tau, d\tau)$$

oder dass $d\frac{\omega(\tau)}{\Omega(\tau)} = 0$ ist. Für die Fläche F ist folglich ω/Ω constant, d. h. ihre Gleichung ist

$$\omega(u) - C\Omega(u) = 0.$$

Diese Gleichung definirt eine Schaar confocaler Flächen zweiter Klasse, welche die Curve Ω zur imaginären Focalcurve haben.

§ 18. Wenn man die beiden Anforderungen, die an $\mathfrak{T}$ gestellt werden, combinirt, bestimmt es sich in folgender Weise.

Die Normale n muss durch die Pole von τ in Bezug ω und Ω gehen, deren Gleichungen

$$\omega(u, \tau) = 0 \qquad \Omega(u, \tau) = 0$$

sind. Sind ferner λ und μ zwei durch n gehende reelle Ebenen, λ_i und μ_i ihre Coordinaten, so verlangt die Forderung, dass durch n zwei Ebenen gehen, welche ω und Ω gleichzeitig berühren (§ 14), dass

$$\Omega(\lambda\lambda) = c\,\omega(\lambda\lambda), \quad \Omega(\lambda\mu) = c\,\omega(\lambda\mu), \quad \Omega(\mu\mu) = c\,\omega(\mu\mu)$$

sei. Da die Ebenen λ und μ durch n gehen, ist die Bedingung dafür, dass n die Pole von τ in Bezug auf ω und Ω enthalte, durch die vier Gleichungen

$$\omega(\lambda\tau) = \omega(\mu\tau) = \Omega(\lambda\tau) = \Omega(\mu\tau) = 0$$

gegeben.

Setzen wir $\Omega(u) - c\,\omega(u) = W(u)$, so ist auch

$$W(\lambda\lambda) = W(\lambda\mu) = W(\mu\mu) = W(\lambda\tau) = W(\mu\tau) = 0.$$

Ist σ eine Ebene, die nicht durch den Schnitt von λ, μ und τ geht, und solche gibt es, da diese drei Ebenen nicht dieselbe Gerade enthalten, und multiplicirt man die Hesse'sche Determinante von W zweimal mit $\Sigma \pm \lambda_1 \mu_2 \tau_3 \sigma_4$, so entsteht Null. Daher ist W eine Grenzfläche nach der Bezeichnung von Hesse (Anal. Geom. des Raumes 3. Auflage Seite 173). Aus den drei ersten der letzten Gleichungen folgt noch

$$W(\lambda + p\,\mu, \lambda + p\,\mu) = 0$$

für beliebige p, also gehen durch den Schnitt von λ und μ unendlich viele Tangentenebenen der Grenzfläche, so dass n Tangente eines Kegelschnitts ist, wenn die Grenzfläche W nicht zerfällt. Da aber in dem Büschel $\Omega - c\,\omega$, wenn nicht alle Flächen Grenzflächen sind, höchstens zwei Grenzflächen vorhanden sind — ω und Ω selbst sind unbrauchbar, weil sie imaginäre Kegelschnitte enthalten — so liegen, wenn jene zwei Grenzflächen nicht zerfallen, ihre Tangenten, also die Normalen von F, in zwei Ebenen, was nicht möglich ist.

Also muss Ω so beschaffen sein, dass jenes Büschel zerfallende Grenzflächen enthält. Eine Grenzfläche zweiter Klasse kann aber entweder in zwei Punkte zerfallen oder aus einem einzigen Punkte bestehen. Sei im ersten Falle

$$W(u) = r(u) \cdot s(u)$$

so muss demnach

$$r(\lambda)\, s(\lambda) = r(\mu)\, s(\mu) = r(\lambda)\, s(\mu) + r(\mu)\, s(\lambda) = 0$$

sein. Wenn n durch keinen der beiden Punkte r oder s ginge, könnte man λ und μ so annehmen, dass keine der vier Grössen $r(\lambda)$, $s(\lambda)$, $r(\mu)$, $s(\mu)$ Null wäre. Daher muss n etwa durch r gehen. Legen wir dann μ noch durch s, so ist $r(\lambda) = r(\mu) = s(\mu) = 0$, $s(\lambda)$ nicht 0. Dann muss sein

$$0 = W(\lambda\,\tau) = s(\lambda)\, r(\tau), \quad \text{also} \quad r(\tau) = 0,$$

es muss somit τ durch r gehen. Alle Normalen gingen folglich durch einen Punkt, der auch in allen Tangentenebenen enthalten wäre, was nicht möglich ist. Ebenso ist es, wenn n durch s geht.

Also kann W nur ein Quadrat $= r(u)^2$ sein. Dann müssen die Gleichungen bestehen

$$r(\lambda)^2 = r(\mu)^2 = r(\lambda)\, r(\mu) = r(\lambda)\, r(\tau) = r(\mu)\, r(\tau) = 0,$$

welchen zufolge n jede Linie durch den Punkt r sein kann. In diesem Falle gehen folglich alle Normalen durch einen Punkt. Die beiden letzten Gleichungen sind dann für jedes τ erfüllt, so dass τ aus $\omega(\lambda\,\tau) = 0$ $\omega(\mu\,\tau) = 0$ bestimmt werden muss.

Wenn nicht alle Flächen des Büschels Grenzflächen sind, so kann es unter den Functionen $\Omega - c\,\omega$ höchstens zwei geben, die Quadrate sind, so dass die Normalen zwei Strahlenbündel bilden könnten.

§ 19. Sollen alle Flächen des Büschels Grenzflächen sein, so muss entweder die Ebene von Ω Tangentenebene

von ω sein oder umgekehrt oder die Ebenen von ω und Ω müssen zusammenfallen. Da die Transformation $\mathfrak{T}$ reell ist und die Ebene von ω ebenfalls, so ist es auch die von Ω und somit ist der erste Fall nicht möglich. Im zweiten ist $\mathfrak{T}$ affin, weil die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht.

Wenn dann ω und Ω nicht identisch sind, bilden die Ebenen, welche beide berühren, je nach der Lage von Ω gegen ω, 4, 3, 2 oder 1 Ebenenbüschel, deren Axen die gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte sind und in der unendlich fernen Ebene liegen. Die Normalen sind also dann Schnitte von zwei Ebenen aus zwei verschiedenen Büscheln. Die Tangentialebene τ muss den vier Gleichungen

$$\omega(\lambda u) = 0 \quad \omega(\mu u) = 0 \quad \Omega(\lambda u) = 0 \quad \Omega(\mu u) = 0$$

genügen, welche die Berührungspunkte der Ebenen λ und μ mit ω und Ω vorstellen. Sie ist also die unendlich ferne Ebene, wenn die Zahl der Berührungspunkte mindestens drei ist. Einen brauchbaren Fall erhalten wir daher nur, wenn die gewählten beiden Büschel zusammen nur zwei Berührungspunkte haben. Dies tritt weder ein, wenn ω und Ω vier gemeinsame Tangenten besitzen, noch wenn sie deren drei haben. Haben sie dagegen nur zwei Tangenten gemein, so können diese drei oder zwei Berührungspunkte haben. Nur den letzten Fall können wir benutzen, in dem sich dann ω und Ω doppelt berühren. Die Berührungssehne der beiden Tangenten ist dann Axe eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen Tangentenebenen sein können. Die Ebenen aus beiden Büscheln, deren Axen die gemeinsamen Tangenten sind, schneiden sich aber in einem unendlich fernen Punkte, d. h. alle Normalen sind parallel. Haben ω und Ω nur eine Tangente gemein, so wären λ und μ aus dem Büschel zu wählen, dessen Axe sie ist und n wäre eine unendlich ferne Gerade.

§ 20. Also bleibt nur übrig, dass die beiden Kegelschnitte ω und Ω zusammenfallen oder dass alle Normalen durch einen oder zwei, endliche oder unendlich ferne, Punkte gehen. Der erste Fall liefert eine Aehnlichkeitstransformation.

Gehen alle Normalen durch einen endlichen Punkt, so nehmen wir ihn zum Ursprung eines rechtwinkeligen Systems. Dann muss sein

$$x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{Constante};$$

die Fläche F ist Theil einer Kugelfläche.

Schneiden sich die Normalen in einem unendlich fernen Punkt der z Axe, so verlangt dies

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

also z constant, wobei F eine Ebene wäre.

Dass alle Normalen zwei Bündel bilden, ist ausgeschlossen durch unsere Annahme, dass die Lothlinien, folglich hier die Normalen, ihre Richtung stetig ändern.

Ist F Stück einer Kugel, so muss auch F' ein Kugelstück sein und folglich ist auch hier die Abbildung von F' auf F eine ähnliche. Eine Abbildung einer Kugel auf eine Ebene ist offenbar unter der Bedingung der §§ 14 und 17 nicht möglich, wegen der Winkelsumme im Dreieck. Dagegen lassen sich zwei Ebenen selbstverständlich ähnlich aufeinander abbilden.

Sind also die Lothlinien Normalen und findet Gleichheit der Horizontalwinkel statt, so sind die beiden Flächen F und F' in allen Fällen einander ähnlich.

Da wie in § 16 erwähnt ein mässig grosser Bezirk der

Geoidfläche sich in der angegebenen Weise auf ein Rotationsellipsoid abbilden lässt, so könnte man schliessen, dass das betreffende Geoidstück einem Stücke eines Rotationsellipsoids ähnlich wäre, wenigstens mit einer gewissen Annäherung. Freilich müsste nach unseren Resultaten auch die relative Lage der Lothlinien beider Flächen die nämliche sein. Solange nur geodätische Messungen vorliegen, lässt sich die Richtigkeit dieser Folgerung nicht prüfen. Sind aber, wie gewöhnlich, auch astronomische Beobachtungen über die Richtung der Lothlinie auf der Erde gemacht, wenn auch nur in beschränkter Zahl, so kann man diese mit den Normalen des Ellipsoids vergleichen. Wie bekannt zeigen sich dann kleine Differenzen, die Lothabweichungen. Zum Theil sind sie dadurch bedingt, dass man ja auf der physischen Erdoberfläche beobachtet, während man die Lothrichtungen auf dem Geoid mit jenen auf dem Ellipsoid vergleichen müsste. Wenn man die Wirkung der über dem Geoid liegenden Massen auf die Lothrichtung berechnet und diese danach corrigirt, kann man, wenigstens genähert, die Lothrichtung auf dem Geoid bestimmen. Wenn auch dann noch Lothabweichungen übrig bleiben, so ist dies ein Zeichen, dass das Ellipsoid dem Geoid nicht genau genug ähnlich ist. Man kann dann, wenn genug Lothabweichungen bekannt sind, das Ellipsoid durch eine andere von ihm wenig verschiedene Fläche ersetzen, deren Normalen keine Abweichungen mehr zeigen, während die Unterschiede der gemessenen und corrigirten Horizontalwinkel von denen auf der Bildfläche noch in den Grenzen der Beobachtungsfehler bleiben. Die so entstandene Fläche ist dann dem Geoid mit genügender Genauigkeit ähnlich.

Ueber das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher elektrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 26. März.)

Von den Erscheinungen der Elektricitätsbewegung wurden anfangs experimentell ausschliesslich die in Leitern vor sich gehenden geprüft; Maxwell musste die für die Elektricitätsbewegung in Leitern gefundenen Gesetze (das Ohm'sche, das Neumann'sche Induktionsgesetz etc.) mit entsprechenden Modifikationen auf Nichtleiter übertragen, fast ohne sich dabei auf quantitative Experimente stützen zu können, die an letztern angestellt worden wären; nur so gelang es ihm, seine allgemeine die Leiter und Nichtleiter umfassende Theorie der Elektricitätsbewegung aufzubauen.

Um so auffallender muss es erscheinen, dass, während diese Theorie sich im Verhalten der Nichtleiter fast ausnahmslos bestätigt hat, dies für die Leiter nicht in gleichem Maasse gilt. Schon Maxwell fiel dies auf; in neuerer Zeit hat Herr Cohn[1]) diesem Gegenstande eine besondere Abhandlung gewidmet. Er bespricht daselbst besonders die

1) Wied. Ann. Bd. 45 pag. 55, 1892. Ueber Durchsichtigkeit der Metalle vgl. Rathenau, Inauguraldissertation, Berlin 1889, Drude, Wied. Ann. 39, 1890.

Lichtbewegung in Metallen und findet im Gegensatze zu Maxwell, dass sie weniger absorbirt wird als es die Theorie verlangt. Wie er jedoch selbst erwähnt, beweisen die Erscheinungen der auswählenden Absorption, dass hier die diskontinuirliche Molekularstruktur der Materie von wesentlichem Einfluss ist. Da nun die elektrischen Eigenschwingungen der Moleküle offenbar nothwendig ebenfalls Veranlassung zur Absorption geben, so wäre die Thatsache, dass letztere ohne deren Berücksichtigung zu klein herauskommt, von vorne herein zu erwarten.

In neuester Zeit haben auch E. Wiedemann, Ebert[1]) und Hertz[2]) auf die unerwartet grosse Durchlässigkeit dünner Metallschichten für Katedenstrahlen hingewiesen. Die beiden ersteren sagen bei dieser Gelegenheit: „Wir haben hier einen neuen Fall vor uns, welcher zeigt, dass die Maxwell'sche Theorie nicht ausreicht, die Erscheinungen zu erklären.“ Wahrscheinlich hat man es jedoch auch hier mit Schwingungen zu thun, deren Wellenlänge nicht mehr unendlich gross gegen die Molekulardimensionen ist und welche sich daher der Maxwell'schen Theorie von vorne herein entziehen, sodass deren Giltigkeit auf alle anderen Erscheinungen, für welche sie allein gemacht wurde, unangefochten bleibt.

Es folgt nun aus der Maxwell'schen Theorie, dass sehr rasche elektrische Schwingungen, wenn sie sich längs eines Drahtes fortpflanzen, auf dessen Oberfläche beschränkt bleiben; ferner, dass Wellen, deren Fortpflanzungsrichtung nicht wie im eben angeführten Falle parallel, sondern senkrecht zur Metalloberfläche steht (wie dies bei Lichtschwingungen der Fall ist, die senkrecht in Metall eindringen) innerhalb einer Wellenlänge bereits ganz enorm geschwächt werden. Aus dem letzteren Resultate folgt weiter, dass ächte Lichtschwingungen schon beim Durchwandern sehr dünner Metallschichten

1) Phys.-med. Soc. zu Erlangen 14. Dec. 1891.

2) Wied. Ann. 45 p. 28 1892.

ausserordentlich an Intensität verlieren. Die Wellen aber, welche Hertz auch in freier Luft erzeugt hat, und deren Wellenlänge nach Decimetern zählt, müssten nach Maxwell's Theorie durch das blosse Durchwandern eines Metallschirmes von $^1/_{10}$ Millimeter, ja selbst einem Millimeter Dicke noch kaum erheblich geschwächt werden. Nun hat aber Hertz beobachtet, dass selbst weit dünnere Metallschichten für diese Wellen undurchlässig sind; die Ursache hievon kann nach dem obigen nicht in der Absorption in deren Innerem, sondern nur in den Grenzbedingungen beim Ueberschreiten ihrer Oberfläche liegen, was in der That durch Berechnung der Metallreflexion aus Maxwell's Formeln bestätigt wird.

Obwohl die betreffenden Rechnungen für Planwellen und planparallele Metallplatten ohne alle Schwierigkeit sind, da sie ja vollkommen analog denjenigen sind, welche in der Theorie des Newton'schen Farbenglases vorkommen, so scheint mir doch bei der Wichtigkeit des Gegenstandes eine ausführliche Mittheilung desselben angezeigt umsomehr als gerade über diese Vorgänge angestellte Experimente wichtige neue Aufschlüsse namentlich über die noch nicht einmal der Grössenordnung nach bekannten Werthe der Dielektricitätsconstanten der Metalle zu versprechen scheinen. Die allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen, welche Metalle und Drielektrica umfassen, sind folgende:

$$a=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},\quad b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},\quad c=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy} \qquad \text{A)}$$

(M. T. 591, A)[1])

$$4\pi u=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},\quad 4\pi v=\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},\quad 4\pi w=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy} \qquad \text{B')}$$

1) M. T. bedeutet Maxwells treatise on electr. a. magn. second. edit. Die folgende Zahl bedeutet den Artikel, worauf die Nummer der Gleichung folgt. Vgl. auch: Boltzmann, Vorles. über Maxwell's Theorie art. 88, Barth 1891, was ich kurz als B. V. citiren will.

(M. T. 607, E), worin

$$a = \mu\,\alpha, \quad b = \mu\,\beta, \quad c = \mu\,\gamma \qquad \text{F)}$$

(M. T. 616, im Text unmittelbar vor Gleichung 1, B. V. art. 116)

$$4\,\pi f = k\,P, \quad 4\,\pi\,g = k\,Q, \quad 4\,\pi\,h = k\,R \qquad \text{C')}$$

(M. T. 608, F; denn die beiden dortigen Vectoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ haben die Componenten P, Q, R und f, g, h; vergl. auch M. T. 790, 16; statt Maxwell's Buchstaben K wurde k geschrieben.)

$$p = C\,P, \quad q = C\,Q, \quad r = C\,R \qquad \text{D')}$$

(M. T. 609, G. Diese Gleichungen heissen bei Maxwell $\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}$; p,q,r sind die Componenten von $\mathfrak{K}$; vgl. M. T. 611, I*)

$$u = p + \frac{df}{dt}, \quad v = q + \frac{dg}{dt}, \quad w = r + \frac{dh}{dt} \qquad \text{E)}$$

(M. T. 610, H*)

$$P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx}, \quad Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy}, \quad R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \qquad \text{G)}$$

(M. T. 598, B, worin $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, da das Medium ruht.)

§ 1. Einmalige Reflexion.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass nur eine Trennungsfläche vorhanden ist, welche wir als eben voraussetzen und zur yz-Ebene wählen. Links von derselben auf der Seite der negativen Abscissen sei Luft, rechts ein Metall. Elektrische Planwellen sollen vom negativ Unendlichen gegen die Trennungsfläche anrücken. Hier werden sie theils reflectirt, theils dringen sie ins Metall ein; in letzterem existiren also nur Wellen, die in der Richtung der positiven Abscissen fortschreiten. Die Abscissenaxe ist die Fortpflanzungsrichtung, sodass alles nur Function von x und t ist. Die elek-

trischen Verschiebungen sollen in der Richtung der y-Axe geschehen. Wir haben also für negative x: $f = P = h = R = 0$

$$
\begin{aligned}
g = A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + \\
+ C \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) + D \cos \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) = \frac{k}{4\pi} Q.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Hier stellen die Glieder der ersten Zeile die directe, die der zweiten die reflectirte Welle dar. An Stelle von $\sqrt{\mu k}$ sollte vorläufig eine später zu bestimmende Constante stehen. Wir schreiben jedoch schon jetzt diesen später sich ergebenden Werth (M. T. 784, 10; B. V., art. 95, Gl. 87). Aus C′ und G) folgt $H = T_1$,

$$
\begin{aligned}
G = \frac{2\tau}{k}\Big[A \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) - B \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + \\
+ C \cos \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) - D \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big] + T_2,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

wobei T_1 und T_2 kein x enthalten. Nach A folgt weiter $a = \alpha = b = \beta = 0$

$$
\begin{aligned}
c = \mu\gamma = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}\Big[A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + \\
+ B \cos \frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) - C \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) - \\
- D \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Bilden wir $\frac{dc}{dx}$ und $\frac{dg}{dt}$, so sehen wir, dass auch die Gleichungen B und E erfüllt sind, dass also für die Constante, die eigentlich statt $\sqrt{\mu k}$ hätte gesetzt werden sollen, der richtige Werth gewählt wurde.

Die Werthe unserer Grössen rechts von der yz-Ebene sollen mit dem Index 1 versehen werden. C_1 und vorläufig

auch k_1 sollen dort von Null verschieden sein, so dass die allgemeinen Gleichungen A bis G gelten. Wir haben dort nur die durchgehende in der positiven x-Richtung fortschreitende, keine reflectirte Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass auch das Glied verschwindet, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält. Dann würden die für positive Abscissen geltenden Gleichungen erfüllt durch $f_1 = P_1 = h_1 = R_1 = 0$

$$q_1 = \frac{4\pi C_1}{k_1} g_1 = e^{-\xi x} E \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right)^{1)} \qquad 4)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 &= -\frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4 k_1^2 \mu_1^2}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C_1^2 \mu_1^2}{\tau^2}} \\ \eta = \frac{4\pi^2 \mu_1 C_1}{\tau \xi}, \quad \eta^2 &= \frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^2 k_1^2 \mu_1^2}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C_1^2 \mu_1^2}{\tau^2}} \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

wobei der Quadratwurzel der positive Werth beizulegen ist und auch für ξ und η deren positive Werthe zu setzen sind. Aus D' und G folgt wieder $H_1 = T_3$,

$$G_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) + T_4 \qquad 6)$$

und aus A folgt $a_1 = \alpha_1 = b_1 = \beta_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} c_1 = \mu_1 \gamma_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x}\Big[\eta \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) - \\ - \xi \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right)\Big]. \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Durch Bildung von $\frac{d\gamma_1}{dx}$ und $\frac{dg_1}{dt}$ können wieder die Gleichungen B' und E noch verificirt werden.

Es handelt sich noch um die Grenzbedingungen für die

1) Siehe B. V. art. 96, pag. 101. Nach C' und D' können sich f, g, h von p, q respective r nur durch constante Factoren unterscheiden.

Trennungsfläche. Obwohl dieselben schon von Maxwell aufgestellt wurden, wollen wir sie doch lieber nach einer oft (von Helmholtz, Hertz etc.) verwendeten Methode aus den Gleichungen A bis G entwickeln. Wir betrachten sogleich den allgemeinsten Fall, dass rechts und links von der Trennungsfläche, welche wir zur yz-Ebene wählen, ein ganz beliebiges Medium vorhanden ist. Rechts wenden wir den Index 1 an. Substituiren wir statt der Trennungsfläche eine Schicht continuirlichen Uebergangs von der Dicke δ, so sind darin die Differenzialquotienten nach x im Allgemeinen Unendlich wie $1:\delta$, die nach y und z aber sind endlich, so dass letztere, sowie die ebenfalls überall endlichen Grössen $a, b, c, u \cdots$, mit dx multiplicirt und von Null bis δ integrirt, Verschwindendes liefern. Es liefern daher die Gleichungen A mit dx multiplicirt und von Null bis δ integrirt:

$$G = G_1, \qquad H = H_1.$$

Da Ψ das Potential der freien Elektricität ist, so haben seine Differentialquotienten in Richtungen, die tangential zur Trennungsfläche stehen, zu beiden Seiten derselben den gleichen Werth. In dem von uns betrachteten Falle müssen übrigens die Glieder $\frac{d\Psi}{dy}$ und $\frac{d\Psi}{dz}$ überhaupt verschwinden, da alles nur Function von x und t ist. Wir erhalten also aus G, C′ und D′

$$\left.\begin{aligned} Q = Q_1 = \frac{4\pi}{k} g = \frac{q}{C} = \frac{4\pi}{k_1} g_1 = \frac{q_1}{C_1} \\ R = R_1 = \frac{4\pi}{k} h = \frac{r}{C} = \frac{4\pi}{k_1} r_1 = \frac{r_1}{C_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{H)}$$

Multipliciren wir ebenso die Gleichungen B′ mit dx und integriren von Null bis δ, so folgt:

$$\beta = \beta_1 = \frac{b}{\mu} = \frac{b_1}{\mu_1}, \; \gamma = \gamma_1 = \frac{c}{\mu} = \frac{c_1}{\mu_1}. \qquad \text{G)}$$

In unserem speciellen Falle erhalten wir für $t=0$:

$$g=(A+C)\sin\frac{2\pi t}{\tau}+(B+D)\cos\frac{2\pi t}{\tau}$$

$$c=\mu\gamma=4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\left[(A-C)\sin\frac{2\pi t}{\tau}+(B-D)\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right] \quad 8)$$

$$g_1=E\sin\frac{2\pi t}{\tau},\quad c_1=\mu_1\gamma_1=\frac{\tau E}{2\pi C_1}\left[\eta\sin\frac{2\pi t}{\tau}-\xi\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right].$$

Die Gleichungen H liefern also: $D=-B$, $A+C=\frac{Ek}{4\pi C_1}$; nimmt man dazu die Gleichungen G, so folgt:

$$A=\left(\frac{k}{8\pi C_1}+\frac{\tau\eta\sqrt{\mu k}}{16\pi^2\mu_1 C_1}\right)E$$

$$C=\left(\frac{k}{8\pi C_1}-\frac{\tau\eta\sqrt{\mu k}}{16\pi^2\mu_1 C_1}\right)E \quad 9)$$

$$D=-B=\frac{\tau\xi\sqrt{\mu k}}{16\pi^2\mu_1 C_1}E$$

Man setzt gewöhnlich voraus, dass in Leitern die dielektrische Polarisation gering ist, also k verschwindet. Experimentell dürfte diess freilich kaum feststehen, da auf elektrostatische Phänomene, stationäre Strömung und die Integralinductionsströme der Werth von k bei genügend guter Leitung ohne Einfluss ist. Sei das Medium rechts ein derartiger Leiter, also $k_1=0$, dann wird $\xi=\eta=2\pi\sqrt{\frac{\mu_1 C_1}{\tau}}$ daher

$$A=\frac{E}{8\pi}\left(\frac{k}{C_1}+\sqrt{\frac{\mu k\tau}{\mu_1 C_1}}\right),\quad C=\frac{E}{8\pi}\left(\frac{k}{C_1}-\sqrt{\frac{\mu k\tau}{\mu_1 C_1}}\right),$$

$$D=-B=\frac{E}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu k\tau}{\mu_1 C_1}}.$$

Der Unterschied der leb. Kraft der directen und reflectirten Welle getheilt durch die erstere leb. Kraft ist

$$Q = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2} = \frac{4\sqrt{\mu\,\mu_1\,k\,C_1\,\tau}}{(\sqrt{\mu_1 k} + \sqrt{\mu\,C_1\,\tau})^2 + \mu\,C_1\,\tau} \qquad 10)$$

Für alle Körper ausser Eisen, Nickel, Kobalt kann $\mu = \mu_1$ gesetzt werden. Wenden wir elektrostatisches Mass an, so ist für Luft $k = 1$. Die Siemenseinheit S ist $0 \cdot 94\,\mathrm{Ohm} = \frac{0 \cdot 94.10^9\,\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$. Bezeichnet C_{mq} die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers im magnetischen Maasse, so ist $S = \frac{10^4}{C_{mq}\,\mathrm{cm}}$ daher

$$C_{mq} = 1 \cdot 062.10^{-5}\frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{cm}^2} \qquad 11)$$

Behufs Verwandlung in elektrostatisches Maass haben wir mit $V^2 = (3.10^{10}\,\mathrm{cm\,sec}^{-1})^2$, behufs Uebergang zu einem anderen Metalle mit L zu multipliciren, wobei L angibt, wievielmal das andere Metall besser leitet, als das Quecksilber. Es ist also für ein beliebiges Metall in elektrostatischen Masse etwa

$$C_1 = 9 \cdot 56.10^{15}\,L\,\mathrm{sec}^{-1}.$$

Bei den von Hertz in Luft erzeugten Wellen geschahen in der Secunde etwa 500 Millionen Schwingungen (die Schwingung zu einem ganz Hin- und Rückgange inclusive gerechnet), was liefert

$$C_1\,\tau = 2.10^7\,L.$$

Setzt man für Kupfer $L = 60$, so folgt Q für dieses Metall gleich $\frac{1}{17000}$; für Platin resp. Quecksilber würde Q etwa drei- resp. achtmalsogross. Es überschreitet also da überhaupt nur ein verschwindender Bruchtheil der lebenden Kraft der Welle die Trennungsfläche; die Welle wird fast total reflectirt. Diess gilt in erhöhtem Masse von noch langsameren Schwingungen.

Dagegen dringt der kleine eintretende Bruchtheil ziemlich

tief ein, pflanzt sich aber enorm langsam fort. Bezeichnen wir ein für allemal mit a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, mit λ die Wellenlänge im Metalle, so ist $a = 2\pi : \eta\tau = 1 : \sqrt{\mu_1 C_1 \tau}$, $\lambda = a\tau = \sqrt{\tau : \mu_1 C_1}$, wobei damit $\mu_1 = 1$ sei, jetzt C_1 magnetisch zu messen ist. Die Absorption ist ein für allemal dadurch bestimmt, dass sich die Amplitüde in einer halben Welle auf den e^{π} also etwa 23ten Theil, die Intensität auf den 529ten Theil reducirt. Für die besprochenen Hertz'schen Schwingungen wäre für Kupfer, Platin resp. Quecksilber etwa

$$a = 10^6,\ 3.10^6,\ 7.10^6 \text{ cm sec}^{-1},$$

$$\lambda = \frac{1 \text{ cm}}{500},\ \frac{1 \text{ cm}}{170},\ \frac{1 \text{ cm}}{70}.$$

In der Hälfte dieser Strecke reducirt sich die Intensität auf den 529ten Theil. Die Länge der Strecke gleicher Intensitätsabnahme wächst für noch langsamere Schwingungen der Quadratwurzel aus der Schwingungsdauer proportional.

Im Natriumlichte geschehen etwa 500 Billionen Schwingungen in der Secunde, da folgt also $C_1 \tau = 20\, L$,

$$Q = \frac{1}{18},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{3.10^{10} \text{ cm}}{\text{sec} \sqrt{20\, L}} = 10^9,\ 3.10^9,\ 7.10^9 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{10^{-4} \text{ cm}}{7\sqrt{L}} = \frac{1 \text{ cm}}{500000},\ \frac{1 \text{ cm}}{170000},\ \frac{1 \text{ cm}}{70000}.$$

Im Platin dringt also der zwölfte Theil der einfallenden Intensität ein und diese reducirt sich nach Durchwanderung des 30000ten Theil eines Millimeters wieder etwa auf den 500ten Theil. Für die Dämpfungsconstante folgt $\xi = 470000\sqrt{L}$. ξ ist gleich Cohn's p, Rathenau's $k_0 : 2$; die Grösse, welche Rathenau mit $2\,k$, Drude mit $\varkappa$ bezeichnet, ist unsere $\xi : \eta$,

müsste also bei verschwindender Dielektricitätsconstante für alle Metalle $= 1$ sein. Die angenäherte Uebereinstimmung der Werthe Rathenau's ist eine scheinbare, da er bei der Berechnung die Wellenlänge in Luft zu Grunde legt. Wie schon erwähnt, ist allgemeine Anwendbarkeit dieser Formeln in der Optik ebensowenig zu erwarten, als dass für alle durchsichtigen Körper die Dielektricitätsconstante das Quadrat des Brechungsexponenten ist.

Der Ausdruck 10) für Q hat seinen Maximalwerth $2(\sqrt{2}-1) = 0 \cdot 828$ für $\tau = \mu_1 k : 2 \mu C_1$, also für Kupfer, Platin und Quecksilber für etwa 1200000, 120000 und 20000 Billionen Schwingungen in der Secunde. Alsdann sind Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge im Metalle $\sqrt{2}$ mal so gross als auf der anderen Seite der Trennungsfläche in Luft.

Für noch raschere Schwingungen nimmt Q wieder und zwar bis in Unendliche ab. Doch ist zu bemerken 1. dass in den zuletzt betrachteten Fällen die Wellenlänge von molekülarer Kleinheit ist, dieselben also ausserhalb des Gültigkeitsbereichs unserer Formeln liegen. 2. dass die Resultate wesentlich modificirt werden können, wenn die Dielektricitätsconstante k_1 des Metalls einen erheblichen Werth hat und es böten Experimente über rasche elektrische Schwingungen in Metallen wohl das einzige Mittel, über die Dielektricitätsconstante der Metalle etwas zu erfahren. 3. dass man mit der Erfahrung vergleichbare Resultate erst erhalten kann, wenn man auch den Wiederaustritt der elektrischen Schwingungen aus dem Metalle in Luft betrachtet. Zum 2. Punkte bemerken wir folgendes:

Setzt man k_1 von Null verschieden und zur Abkürzung

$$\frac{\mu k_1}{\mu_1 k} = u, \quad 2\frac{C_1 \mu \tau}{k \mu_1} = v$$

so wird:

$$Q = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2} = \frac{2\sqrt{2u + 2\sqrt{u^2 + v^2}}}{1 + \sqrt{2u + 2\sqrt{u^2 + v^2}} + \sqrt{u^2 + v^2}}$$

Bei den früher betrachteten Hertz'schen Schwingungen war $\mu = \mu_1$, $k = 1$, $C_1 \tau = v : 2 = 2.10^7 L$. Wenn also selbst die Dielektricitätsconstante des Metall eine millionmal grösser als die der Luft wäre, so würden die für diesen Fall gefundenen Resultate kaum alterirt. Dagegen würde im Falle des Natriumlichts die Dielektricitätsconstante des Metalls schon einen kleinen Einfluss bekommen, wenn sie der der Luft gleich wäre. Der Verlauf noch viel rascherer Schwingung würde dann gänzlich verändert.

Die Gleichungen 5 zeigen, dass mit wachsendem k_1 sowohl die Dämpfungsconstante ξ als auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $2\pi : \eta\tau$ nur abnehmen kann. Habe ξ, wenn alles sonst unverändert bleibt, nur $k_1 = 0$ ist, den Werth ξ_0, so hat man nämlich $\xi_0^4 = \xi^4 + 4\pi^2 k_1 \mu_1 \xi^2 : \tau^2$.

Wenn entgegen dem zuerst betrachteten Falle das k_1 enthaltende Glied gross gegen das C_1 enthaltende ist, so wird:

$$\xi = 2\pi C_1 \sqrt{\frac{\mu_1}{k_1}}, \quad \frac{2\pi}{\eta\tau} = \frac{1}{\sqrt{k_1 \mu_1}}, \quad Q = \frac{4\sqrt{\mu \mu_1 k k_1}}{(\sqrt{\mu k_1} + \sqrt{\mu_1 k})^2}.$$

$$A = \left(\frac{k}{k_1} + \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}\right)\frac{E k_1}{8\pi C_1}, \quad C = \left(\frac{k}{k_1} - \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}\right)\frac{E k}{8\pi C_1}$$

$$B = -D = \frac{\tau E}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}.$$

Nun schreiten wir zur Erledigung des 3. Punktes.

§ 2. Betrachtung einer planparallelen Metallplatte.

Seien die Ebenen $x = -p$ und $x = 0$ die beiden Begrenzungsflächen einer Metallplatte. Die im Innern der Metallplatte gültigen Werthe sollen den Index 1 erhalten. Links auf Seite der negativen Abscissen (wofür kein Index angewendet wird und rechts von der Metallplatte (Index 2 für die variabeln Grössen) sei dasselbe Dielectricum Luft. Von links sollen Planwellen anrücken, welche an beiden Metalloberflächen reflectirt werden. Rechts von der yz-Ebene ist dann keine reflectirte, nur die durchgedrungene Welle vorhanden. Die übrigen Verhältnisse sollen wie im vorigen Paragraph sein. Dann ist also für $-\infty < x < -p$:

$$g = A \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B\cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) +$$

$$+ C\sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) + D\cos\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}).$$

$$c = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\Big[A\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B\cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) -$$

$$- C\sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) - D\cos\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big].$$

Für $-p < x < 0$

$$g_1 = e^{-\xi x}\left[E\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right) + F\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right)\right] +$$

$$+ e^{\xi x}\left[G\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right) + H\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right)\right]$$

$$G_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1}\left\{e^{-\xi x}\left[E\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right) - F\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right)\right] +\right.$$

$$\left. + e^{\xi x}\left[G\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right) - H\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right)\right]\right\}$$

$$c_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1}\Big\{e^{-\xi x}\Big[(E\eta + F\xi)\sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big) +$$
$$+ (-E\xi + F\eta)\cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\Big)\Big] +$$
$$+ e^{\xi x}\Big[(-G\eta - H\xi)\sin\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big) +$$
$$+ (G\xi - H\eta)\cos\Big(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\Big)\Big]\Big\}.$$

Endlich für $x > 0$ haben wir nur die durchgehende in der positiven x-Richtung fortschreitende Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass das Glied, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält, verschwindet. Dann wird also für $x > 0$

$$g_2 = J\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}), \quad c_2 = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,J\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}).$$

Die Bedingungsgleichungen für $x = 0$ lauten:

$$\frac{g_1}{C_1} = \frac{4\pi g_2}{k}, \qquad \frac{c_1}{\mu_1} = \frac{c_2}{\mu},$$

was liefert:

$$H = -F, \quad G = E - 2\frac{\eta F}{\xi}, \quad E - \frac{\eta}{\xi}F = \frac{2\pi C_1 J}{k}$$

$$F = -H = \frac{4\pi^2\mu_1 C_1 \xi J}{(\xi^2 + \eta^2)\tau\sqrt{\mu k}}, \quad E = \frac{2\pi C_1 J}{k} + \frac{4\pi^2\mu_1 C_1 \eta J}{(\xi^2 + \eta^2)\tau\sqrt{\mu k}}$$

$$G = \frac{2\pi C_1 J}{k} - \frac{4\pi^2\mu_1 C_1 \eta J}{(\xi^2 + \eta^2)\tau\sqrt{\mu k}}$$

Setzen wir

$$\cos\frac{2\pi p}{\tau}\sqrt{\mu k} = a, \quad \sin\frac{2\pi p}{\tau}\sqrt{\mu k} = \alpha, \quad \cos p\eta = b, \quad \sin p\eta = \beta,$$
$$e^{\xi p} = \gamma,$$

so liefern die Bedingungsgleichungen für $x = -p$:

$$Aa - Ba + Ca + Da = \frac{k}{4\pi C_1}\left(Eb\gamma - F\beta\gamma + \frac{Gb}{\gamma} + \frac{H\beta}{\gamma}\right)$$

$$Aa + Ba - Ca + Da = \frac{k}{4\pi C_1}\left(E\beta\gamma + Fb\gamma - \frac{G\beta}{\gamma} + \frac{Hb}{\gamma}\right)$$

$$Aa - Ba - Ca - Da = \frac{\tau\sqrt{\mu k}}{8\pi\mu_1 C_1}\Big[E\gamma(b\eta + \beta\xi) +$$

$$+ F\gamma(b\xi - \beta\eta) + \frac{G}{\gamma}(-b\eta + \beta\xi) - \frac{H}{\gamma}(b\xi + \beta\eta)\Big]$$

$$Aa + Ba + Ca - Da = \frac{\tau\sqrt{\mu k}}{8\pi^2\mu_1 C_1}\Big[E\gamma(-b\xi + \beta\eta) +$$

$$+ F\gamma(b\eta + \beta\xi) + \frac{G}{\gamma}(b\xi + \beta\eta) + \frac{H}{\gamma}(-b\eta + \beta\xi)\Big].$$

Wir wollen $J = 1$ setzen, wodurch nur sämmtliche Amplitüden mit einem constanten Factor multiplicirt werden; ferner setzen wir zur Abkürzung

$$2\delta = \gamma + \frac{1}{\gamma} = e^{p\xi} + e^{-p\xi}, \quad 2\varepsilon = \gamma - \frac{1}{\gamma} = e^{p\xi} - e^{-p\xi},$$

dann wird:

$$Aa - Ba + Ca + Da = b\delta + \frac{b\varepsilon\eta - \beta\delta\xi}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{2\pi\mu_1}{\tau}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$Aa + Ba - Ca + Da = \beta\varepsilon + \frac{b\varepsilon\xi + \beta\delta\eta}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{2\pi\mu_1}{\tau}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$Aa - Ba - Ca - Da = b\delta + (b\varepsilon\eta + \beta\delta\xi) \cdot \frac{\tau}{2\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$$Aa + Ba + Ca - Da = \beta\varepsilon + (-b\varepsilon\xi + \beta\delta\eta) \cdot \frac{\tau}{2\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach: 1. mit a, a, a, a; 2. mit $-a$, a, $-a$, a; 3. mit a, $-a$, $-a$, a; 4. mit a, a, $-a$, $-a$ und setzt noch zur Abkürzung:

$$\varkappa = \frac{\tau}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}} + \frac{\pi\mu_1}{\tau(\xi^2+\eta^2)}\sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

$$\lambda = \frac{\tau}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{\mu}{k}} - \frac{\pi\mu_1}{\tau(\xi^2+\eta^2)}\sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

so erhält man

$$A = a\,b\,\delta + \alpha\,\beta\,\varepsilon + (a\,b\,\varepsilon + \alpha\,\beta\,\delta)\,\eta\,\varkappa + (a\,\beta\,\delta - \alpha\,b\,\varepsilon)\,\xi\,\lambda$$

$$B = a\,\beta\,\varepsilon - \alpha\,b\,\delta + (a\,\beta\,\delta - \alpha\,b\,\varepsilon)\,\eta\,\varkappa - (a\,b\,\varepsilon + \alpha\,\beta\,\delta)\,\xi\,\lambda$$

$$C = (a\,\beta\,\delta - a\,b\,\varepsilon)\,\eta\,\lambda - (a\,\beta\,\delta + \alpha\,b\,\varepsilon)\,\xi\,\varkappa$$

$$D = -(a\,\beta\,\delta + \alpha\,b\,\varepsilon)\,\eta\,\lambda + (a\,b\,\varepsilon - \alpha\,\beta\,\delta)\,\xi\,\varkappa$$

$$A^2 + B^2 = (b^2\varepsilon^2 + \beta^2\delta^2)(\eta^2\varkappa^2 + \xi^2\lambda^2) + 2\,\delta\,\varepsilon\,\eta\,\varkappa + $$
$$+ 2\,b\,\beta\,(\delta^2 - \varepsilon^2)\,\xi\,\lambda + b^2\delta^2 + \beta^2\varepsilon^2$$

$$C^2 + D^2 = (b^2\varepsilon^2 + \beta^2\delta^2)(\eta^2\lambda^2 + \xi^2\varkappa^2).$$

Sobald die Metallplatte sehr dünn, also p sehr klein ist, wird

$$a = b = \delta = 1, \quad \alpha = \beta = \varepsilon = 0,$$

daher

$$A = 1, \quad B = C = D = 0,$$

es werden also die Wellen durchgelassen, als ob die Metallplatte nicht vorhanden wäre (Fall 1). Ein anderer extremer Fall (2) tritt ein, wenn $\xi\lambda$ und $\varkappa\eta$ (wenigstens eine dieser beiden Grössen) sehr gross ist. Dann verschwindet das erste Glied im Ausdrnck für A sowie in dem für B und man hat $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$. Alle Bewegung wird reflectirt.

Man kann die Frage aufwerfen, wie dünn in diesem letzten Falle bei gegebener Schwingungsdauer die Metallplatte sein müsse, damit der Uebergang in das zuerst genannte Extrem eintrete.

Wir wollen da wieder bloss den Fall betrachten, dass die dielektrischen Eigenschaften der Metallschicht nicht in Betracht kommen, also k_1 verschwindet. Dann wird, wie wir sahen, $\xi = \eta = 2\pi\sqrt{\frac{\mu_1 C_1}{\tau}}$.

Wir setzen ferner $\mu = \mu_1$ und erhalten

$$\varkappa \eta = \varkappa \xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1 \tau}{k}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{C_1 \tau}},$$

$$\lambda \xi = \lambda \eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1 \tau}{k}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{C_1 \tau}}.$$

Dieser Ausdruck wird sehr gross, wenn $\sqrt{\frac{C_1 \tau}{k}}$ sehr gross oder sehr klein ist. Im ersteren Fall, der, wie aus den numerischen Beispielen des vorigen Paragraphen ersichtlich ist, bei den Hertz'schen Schwingungen eintritt, wird $\varkappa\xi = \lambda\xi$.

Da

$$\frac{\arccos b}{\arccos a} = \sqrt{\frac{C_1 \tau}{k}},$$

so wird in diesem Falle auch dieses Verhältniss sehr gross, und daher α noch viel kleiner, als β sein, dessen Kleinheit die Grösse von $\eta\,\varkappa$ und $\xi\,\lambda$ zu compensiren hat. a und b können gleich eins gesetzt werden. Wir verbinden hiemit den Fall 1, dass fast alles Licht durchgeht, wenn p so klein ist, dass $\varepsilon = p\,\xi = 2\pi p\sqrt{\frac{C_1 \mu}{\tau}}$ klein gegen 1, $\delta = 1$ wird.

Setzt man dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen im Medium zu beiden Seiten der Metallschicht (Luft) $\frac{1}{\sqrt{\mu k}} = V$, so ist

$$A = 1 + 2\pi p \frac{C_1}{k V}, \quad C = -2\pi p \frac{C_1}{k V}, \quad B = D = 0.$$

Wenn $p\,\xi$ gross ist, also nur wenig Licht hindurchgeht, so wird:

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{2} e^{2 p \xi} (\xi^2 \varkappa^2 + \xi \varkappa), \; C^2 + D^2 = \frac{\xi^2 \varkappa^2}{2} e^{2 p \xi}.$$

Numerische Berechnungen nach dieser Formel, ähnlich wie wir sie an die Formel des vorigen Paragraph geknüpft haben, stossen natürlich nicht auf die mindeste Schwierigkeit. Eine experimentelle Prüfung der Durchlässigkeit äusserst dünner Schichten aus schlecht leitenden Metallen oder anderen Leitern für Licht und elektrische Schwingungen könnten vielleicht Aufschlüsse über deren Dielektricitätsconstante liefern.

Auch die Berechnung des entgegengesetzten Falles, dass die Schwingungen so rasch geschehen, dass $\frac{C_1 \tau}{k}$ sehr klein ist (Kathodestrahlen?), hat keine Schwierigkeit, doch gehe ich darauf nicht weiter ein, da diese Phänomene wohl durch den specifischen Einfluss der Resonanz der einzelnen Moleküle zu sehr gestört werden dürften.

Ueber den Magnetismus des Eisens unter dem Einfluss elektrischer Schwingungen.

Von R. Emden.

(Mit Tafel I.)

(Eingelaufen 5. März.)

Es ist bekannt,[1] dass für nicht zu rasch alternirende Ströme Eisendrähte einen viel grösseren Coefficienten der Selbstinduktion besitzen als Kupferdrähte, da der Strom bei ersteren nicht nur den umgebenden Raum, sondern auch die Leitungsbahn selbst zu magnetisiren hat, welche Magnetisirungsarbeit für letztere verschwindend klein ist. Anderseits hat Hertz[2]) gefunden, dass für sehr rasch oscillirende Ströme sich der Magnetismus des Eisens nicht mehr geltend macht und Lodge[3]) giebt an, dass durch Eisendrähte sich Batterieentladungen nicht anders vollziehen wie durch Kupferdrähte. Man kann dies durch die Annahme erklären, dass die Eisenmolekeln zu träge sind, sich den raschen Stromwechseln gemäss umzulagern, oder neueren Anschauungen gemäss annehmen, dass in diesem Falle die Stromfäden nur an der Oberfläche des Drahtes liegen und so auf das Innere desselben nicht mehr magnetisirend wirken.[4]) Diese neuere

1) Wiedemann. Lehrbuch der Elektricität. III. S. 691.

2) Hertz. Wied. Annal. 31. pag. 421.

3) Lodge. Electrician 11. pag. 612.

4) Stefan. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 95. II. Abth. pag. 817. 1887.

Ansicht scheint durch die vorliegende Arbeit, die experimentelle Beiträge liefern soll über den Zusammenhang des Magnetismus des Eisens und der Schwingungszahl der magnetisirenden Wechselströme, an Wahrscheinlichkeit zu gewinnen.

Rasch alternirende Ströme kann man erhalten, wenn man Batterieen sich durch eine Leitungsbahn von genügend grossem Selbstinduktionscoefficienten entladen lässt. Die Schwingungszahl des Entladestroms kann duech Untersuchung des Entladefunkens im rotirenden Spiegel experimentell bestimmt werden. Sie ist abhängig von der Capacität der Batterie und der Selbstinduktion der Leitungsbahn. Würde man eine Batterie abwechselnd durch eine Leitungsbahn aus Kupfer und Eisen entladen, so hätte man eine Methode, um eine Verschiedenheit der beiden Selbstinduktionscoefficienten, und dadurch ein Maass für den Magnetismus des Eisendrahtes, zu bestimmen, die nur an dem Uebelstande leidet, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit des Spiegels, deren genaue Messung äusserst schwierig ist, quadratisch eingeht. Diesem Uebelstande wurde durch die folgende Versuchsanordnung abgeholfen.

Es wurden gleichzeitig 2 möglichst gleiche Batterieen benutzt, deren etwaige Ungleichheit durch Vertauschen eliminirt wurde. Die Entladekreise der beiden Batterieen hatten möglichst gleiche geometrische Configuration, doch war der eine aus Kupferdraht, der andere aus einem weichen Eisendraht von gleichem Querschnitte hergestellt. Beide Batterieen wurden gleichzeitig bis zum gleichen Potential geladen, in demselben Moment entladen, die beiden Funken gleichzeitig in einem rotirenden Spiegel zerlegt und die Funkenbilder auf einer photographischen Platte fixirt. Die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels braucht dann nur so genau bestimmt zu werden, um ein Maass für die Grösseanordnung der Stromwechselzahl zu erhalten. Denn die Ausmessung der photographischen Bilder lässt Unterschiede der Schwingungs-

dauer der beiden Ströme mit grösster Genauigkeit nachweisen.

Die Dimensionen der Batterieen und Leitungsbahnen wurden so gewählt, dass die Schwingungsdauer der **halben** Schwingung von $\frac{1}{26000}$ bis $\frac{1}{466000}$ Sekunde variirte.

Die Messungen ergaben folgendes:

1) Der Abstand der Oscillationen auf der Platte ist proportional der Schwingungsdauer. Die Schwingungsdauer der beiden oscillirenden Entladungen verhielten sich also wie diese Abstände, die Selbstinduktionscoefficienten aber wie die Quadrate derselben. Stets war der Selbstinduktionscoefficient der Eisenleitung der grössere und zwar war das Verhältniss der Coefficienten bei

$T_{\text{(die halbe Schwing.)}} = 0{,}00000215;\ 0{,}00000791;\ 0{,}0000190;\ 0{,}0000380''$

$\frac{L_F}{L_C} =$ 1,21 (Mittel aus 15 Platten) 1,36 (Mittel aus 14 Pl.) 1,18 (Mittel aus 11 Pl.) 1,38 (Mittel aus 16 Pl.)

Der Werth 1,36 dürfte zu gross ausgefallen sein, da bei einigen Platten sich unverhältnissmässig grosse Werthe ergaben. Diese Vermuthung wird durch die unter 2) gegebenen Zahlen noch mehr begründet. Es zeigt sich nun vor Allem, dass selbst bei den raschen Polwechseln von 466000 in der Sekunde sich der Magnetismus des Eisens noch deutlich bemerkbar macht. Der kleinste Werth $\frac{L_F}{L_C}$, der bei dieser grössten Schwingungszahl gefunden wurde, betrug 1,15. Hingegen zeigt sich nicht, wie ich anfangs erwartete, dass das Verhältniss dieser Coefficienten mit abnehmender Schwingungszahl stetig zunimmt. Erst bei $T = 0{,}000038''$ macht sich eine Zunahme bemerkbar. Versuche mit noch grösseren und kleineren Schwingungszahlen sind im Gange.

2) Bei konstantem Strome zeigten die beiden Leitungsbahnen eine Differenz ihrer Widerstände bis zu 25 Ohm, je nach der angewandten Drahtlänge. Es schien angebracht,

diese Widerstände wenigstens für konstanten Strom auszugleichen. Das wurde so erreicht, dass in der Kupferleitung ein dünner Nickelindraht, in die Eisenleitung ein gleicher Kupferdraht eingeschaltet wurde. Diese dünnen Drähte waren so gewickelt, dass ihre Selbstinduktionscoefficienten möglichst klein wurden, und ihre Längen wurden so genommen, dass die Widerstände ausgeglichen waren. Es ergab sich dann:

$T =$	0,00000215;	0,00000791;	0,0000190;	0,0000380″
$\frac{L_F}{L_C} =$	1,19 (Mittel aus 12 Platten	1,22 aus 28 Platten	1,18 aus 18 Platten	1,40 aus 12 Platten.)

Eine Aenderung des Verhältnisses des Coefficient L ist also nicht eingetreten. Die Zahl 1,22 scheint die oben erwähnte Vermuthung zu bestätigen, dass die Zahl 1,36 in 1) zu gross ist.

3) Die Stromschwingungen bei diesen Batterieentladungen finden mit abnehmender Amplitude statt, bestimmt durch die Selbstinduktion und Widerstand der Leitungsbahn (bei gleicher Capacität der Batterieen). Bei den hier angestellten Versuchen zeigten die beiden Leitungsbahnen gänzlich verschiedene Dämpfungsverhältnisse. Benutzt man stets die gleiche Plattensorte, so werden die Schwingungen nicht mehr photographisch wirken, sobald ihre Amplitude unter einen gewissen Werth gesunken ist. Die Anzahl der photographirten Schwingungen auf der Platte giebt einen Maassstab für die Dämpfung derselben. Es ergeben sich bei

Halbe Schwingungen	$T =$ 0,00000215;	0,00000791;	0,0000190;	0,0000380″
bei Cu } bei unausgeglichenen Widerständen des Stromkreises	20	29	22	21
„ Fe }	11	8	5	5
bei Cu } bei ausgeglichenen Widerständen der Stromkreise	12	17	13	20
„ Fe }	11	7	5	5

(Diese Zahlen sind Mittelwerthe der schon oben angegebenen Plattenzahl; bei den verschiedenen Platten zeigten diese Zahlen nur sehr geringe Differenzen.)

Die Schwingungen erleiden in dem Eisendrahte eine ausserordentlich viel stärkere Dämpfung als in demselben Kupferdrahte. Gleicht man die Widerstände der beiden Strombahnen für konstanten Strom aus, so zeigen beide Funken bei der kleinsten beobachteten Schwingungsdauer ungefähr gleich viele Schwingungen; bei den übrigen Schwingungsdauern aber ist die Anzahl derselben im Kupferdrahte 2, 3, resp. 4mal grösser als im Eisendrahte. Stefan hat in der oben citirten Abhandlung diese grössere Dämpfung im Eisen vorausberechnet unter der Annahme, dass mit grösserer Schwingungszahl die Stromfäden immer mehr in der Oberfläche des Drahtes liegen. Nimmt man das nicht an, so ist den älteren Anschauungen gemäss, nicht recht einzusehen, wie bei gleichem Widerstande und ziemlich gleichen Selbstinduktionscoefficienten diese ungleich stärkere Dämpfung zu Stande kommt.

Die grosse Verschiedenheit in der Anzahl der Schwingungen im Kupferdrahte bei kleinerem und grösserem Widerstande zeigt ferner, dass der Widerstand einer Leitung selbst bei grosser Polwechselzahl von 466000 pro Sekunde noch von Einfluss ist.

Bei den langsameren Schwingungen kommt der zur Widerstandsausgleichung beider Stromkreise zu der Kupferleitung addirte Zusatzwiderstand weniger zur Geltung. Da derselbe nur der Drahtlänge der Leitung proportional, der Selbstinduktionscoefficient aber ungleich rascher wächst.

Auf der beiliegenden Tafel I sind die Funkenbilder für 3 verschiedene Schwingungsdauern wiedergegeben und zwar bei nicht ausgeglichenen Widerständen der Kupfer- und Eisenleitung, da der Unterschied bei den Funken so am deutlichsten hervortritt.

Fig. I.

$$T = 0{,}0000380'' = \frac{1}{26300}''.$$

A. Funken in der Kupferleitung. B. Funken in der Eisenleitung.

Verhältniss der Selbstinduktionscoefficienten = 1,44

Verhältniss der Anzahl Schwingungen = $\frac{21}{6}$

Fig. II.

$$T = 0{,}00000791'' = \frac{1}{126000}''.$$

A. Funken in der Kupferleitung. B. Funken in der Eisenleitung.

Verhältniss der Selbstinduktionscoefficienten = 1,25

Verhältniss der Anzahl Schwingungen = $\frac{27}{7}$

Fig. III.

$$T = 0{,}00000215'' = \frac{1}{466000}''.$$

A. Funken in der Kupferleitung. B. Funken in der Eisenleitung.

Verhältniss der Selbstinduktionscoefficienten = 1,15

Verhältniss der Anzahl Schwingungen = $\frac{20}{13}$

Ueber Verkettung.

Von Hermann Brunn.

(Mit Tafel II—IV.)

(Eingelaufen 19. März.)

I. Verkettete Ringe. Schema ihres Verkettungszustandes.

1. Man stelle sich Gebilde vor von der Art eines in sich zurücklaufenden Fadens, ganz gleichgültig, ob man dabei den Faden als Curve, als Fläche oder als Körper sich denkt, und lege diesem Faden die Eigenschaften einerseits der Beweglichkeit, Biegbarkeit und Dehnbarkeit, andrerseits der Unzerreissbarkeit und Undurchdringlichkeit bei.[1]) Ein solches Gebilde sei im Folgenden kurzweg als Ring bezeichnet.

2. Wenn eine Anzahl beliebig verschlungener Ringe vorliegt, so ergibt sich als ein zur Beschreibung des Ringsystem mit verwendbarer Begriff der des Verkettungszustandes. Dieser Begriff ist Gegenstand der folgenden Blätter, zu deren Abfassung ich die erste Anregung fand in zwei von Tait nebeneinandergestellten wesentlich verschiedenen Beispielen je dreier verketteten Ringe,[2]) und die sich inhalt-

1) Eine genauer eingehende Definition würde uns zu Umständlichkeiten verführen, die für das Folgende keinen Werth haben.

2) Siehe Figg. 1 und 2 auf Tafel II. Vgl. Tait, On knots, Transact. of the R. Edinb. Soc. 1876, Vol. 28. Plate XV Fig. 15 und Plate XVI Fig. 26.

lich an die Betrachtungen anreihen, mit denen Listing seine „Vorstudien zur Topologie“ abschliesst.

3. Verkettet mit einander sind Ringe dann, wenn die Weite, bis zu welcher sie von einander entfernt werden können, von ihren Dimensionen abhängt. Wenn eine Anzahl Ringe eine Kette bilden, so kann keiner vom andern über jede Weite hinaus entfernt werden, ohne dass mindestens einer von allen Ringen über jede Länge hinaus gedehnt würde, und es müssen, wenn man die Dimensionen der Ringe hinlänglich verkleinert, sämmtliche Ringe auf einen beliebig kleinen Raum zusammengezwungen werden.

4. Bildet ein Theil der Ringe einer Kette K, allein für sich betrachtet, ebenfalls eine Kette k, so heisse k eine Unterkette von K.

5. Nachdem der Begriff von verketteten Ringen dargestellt ist, lässt sich der von verketteten Ringketten leicht daraus ableiten.

6. Im Gegensatz zu Gebilden, die mit einander verkettet sind, sprechen wir von unverketteten oder „von einander freien“ Gebilden.

7. Unter der Beschreibung des Verkettungszustandes von n Ringen verstehe ich die genaue Angabe der Ketten, welche durch die Ringe gebildet werden, und der sämmtlichen in ihnen enthaltenen Unterketten. Diese Beschreibung wird durch ein jetzt zu bildendes Schema geleistet.

8. Man setze in eine erste Zeile die Namen der Ringe nebeneinander, etwa

1) $R_1, R_2, R_3 \ldots\ldots R_{n-1}, R_n$

Dann bilde man die sämmtlichen Combinationen dieser Buchstaben zu zweien und untersuche, welche dadurch dargestellten Ringpaare, für sich allein betrachtet, mit einander verkettet sind, welche nicht. Die Bezeichnungen der ver-

ketteten Paare setze man in eine zweite Zeile nebeneinander, etwa:

$$2)\qquad R_{i_1} R_{i_2},\ \ R_{i_3} R_{i_4},\ \ldots\ldots,\ R_{i_{m-1}} R_{i_m}$$

In eine dritte Zeile stelle man diejenigen Ringtripel, welche, für sich allein betrachtet, Ketten bilden, etwa:

$$3)\quad R_{k_1} R_{k_2} R_{k_3}.\ R_{k_4} R_{k_5} R_{k_6},\ \ldots\ldots,\ R_{k_{l-2}} R_{k_{l-1}} R_{k_l}$$

und so fahre man fort und stelle, allgemein gesprochen, in der m-ten Zeile die Ketten, resp. Unterketten von m Ringen zusammen. Das Schema bricht von selbst ab, spätestens mit der n-ten Zeile, welche für den Fall, dass sämmtliche Ringe in eine einzige Kette zusammentreten, ein Glied enthält. Die sämmtlichen Zeilen zusammen seien als das (Verkettungs-) Schema der n Ringe bezeichnet.

9. Es liegt nahe, die in einer Zeile stehenden Glieder von der 3. Zeile an in zwei Gruppen zu theilen. Das Bestehen der in einer Zeile vorkommenden Ketten und Unterketten ist entweder aus vorher angeschriebenen Zeilen ersichtlich, oder nicht. So z. B. würde aus dem Bestehen der beiden Ketten $ACEF$ und BCD das Bestehen einer Kette $ABCDEF$ folgen; denn da A, E und F mit C, C mit B und D zusammenhängt, so hängen sämmtliche sechs Ringe unter einander zusammen. Ueberhaupt immer, wenn Ketten einen oder mehrere Ringe gemeinsam haben, lassen sich andere, umfassendere als vorhanden erkennen.

10. Die aus früheren Zeilen zu folgernden Ketten einer Zeile setze man in eine erste, die übrigen in eine zweite Gruppe der Zeile und trenne beide Gruppen durch einen kräftigen Verticalstrich. Anbei (s. S. 80) folgt zur Erläuterung ein ausführlicheres Beispiel; die Unterketten sind mit durchlaufenden Nummern unterschrieben und bei den abgeleiteten links zugleich die Nummern vorhergehender Ketten, aus denen sie abgeleitet werden können, verbunden durch ein Pluszeichen angegeben.

11. Zur weiteren Erklärung des folgenden Beispieles vgl. auch 16.—18.

1.	*a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o. p, q, r, s, t. u, v, w, x, y, z*								
2.	*ab,* 1	*cd,* 2	*de,* 3	*dt,* 4	*hi,* 5	*hk,* 6	*ik,* 7	*pu,* 8	*xy* 9
3.	*cde,* 10, 2+3	*cdt,* 11, 2+4	*det,* 12, 3+4	*hik* 13, 5+7				*abc, deg* 14, 1+*c* 15, 3+*g*	*dgu, wyz* 16 17
4.	*abcd,* 18, 2+14	*cdeg,* 19, 2+15	*cdet,* 20, 4+10	*cdgu,* 21, 2+16	*degt,* 22, 4+15	*degu,* 23, 3+16			*lmno* 27
		dgpu. 24, 8+16	*dgtu,* 25, 4+16	*wxyz* 26, 9+17					
5.	*abcde,* 28, 10+14	*abcdt,* 29, 11+14	*cdegt,* 30, 11+15	*cdegu,* 31, 10+16	*cdgpu,* 32, 2+27	*cdgtu,* 33, 4+21	*ikwyz* 37, 7+17	*frwyz* 38, 17+*fr*	*qrsvz* 39
		degpu, 34, 3+24	*degtu,* 35, 4+23	*dgptu* 36, 4+24					
6.	*abcdeg,* 40, 15+28	*abcdet,* 41, 4+28	*abcdgu,* 42, 16+18	*cdegpu,* 43, 8+31	*cdegtu,* 44, 4+31	*cdgptu,* 45, 4+32	*dethik* 50, 12+13	*frpwyz* 51, 38+*p*	
		degptu, 46, 4+34	*hikwyz.* 47, 5+38	*ikwxyz,* 48, 9+37	*frwxyz* 49, 9+38				
		⋮	⋮	⋮	⋮				
21.	*abcdefghikpqrstuvwxyz* 8+9+39+40+50+51								

12. Die abgeleiteten Ketten lassen sich oft auf mehrfache Weise aus vorhergehenden zusammensetzen, wie z. B. Kette 41: *a b c d e t* statt mit 4 + 28 auch mit 28 + 12 etc. unterschrieben sein könnte.

13. Das gegebene Schema ist nur bis zur 6. Zeile ausgeführt, und angenommen, dass von hier ab in den rechten Zeilenhälften keine neuen Ketten mehr auftreten. Jedenfalls reicht das Schema dann bis zu der wieder angeschriebenen 21. Zeile, und man sieht, dass das ganze Ringsystem aus den von einander freien Ketten

a b c d e f g h i k p q r s t u v w x y z und *l m n o*

besteht.

14. Die rechten Gruppen sämmtlicher Zeilen zusammen wollen wir als die rechte, die linken Gruppen zusammen als die linke Schemahälfte bezeichnen. Die erste und zweite Zeile haben gar keine linke Gruppe und müssen vollständig zur rechten Schemahälfte gerechnet werden.

15. Durch Weglassen der linken Hälfte wird der Inhalt dessen, was das Schema uns lehren kann, in keiner Weise vermindert, da die linke Hälfte stets mittels der rechten reconstruirt werden kann. Es dürfte aber trotzdem in den meisten Fällen sich empfehlen, die linke Hälfte auch auszuführen, resp. beizubehalten.

16. Für die weitere Anordnung der Glieder können sehr verschiedene Gesichtspunkte maassgebend werden.

Für unsere Zwecke nehmen wir in der rechten Hälfte eine bestimmte weitere Eintheilung vor, zusammenhängend damit, dass die Glieder einer Zeile Glieder vorhergehender Zeilen als Unterketten enthalten können oder nicht. Jede rechte Zeilenhälfte wird in drei Theile getheilt. Es werden immer gestellt

in das erste Drittel: Die Glieder, welche aus lauter (bereits vorhergegangenen) Unterketten zusammengesetzt sind;

in das zweite Drittel: Die Glieder, welche Unterketten enthalten, ausserdem aber noch eine Gruppe G von Buchstaben, welche zusammen keine Unterkette bilden;
in das dritte Drittel: Die Glieder, welche gar keine Unterketten enthalten.

17. Die ersten Drittel der sämmtlichen rechten Zeilenhälften seien als erstes Drittel der rechten Schemahälfte bezeichnet, und entsprechend seien die Benennungen zweites und drittes Drittel zu verstehen.

18. Die Zeilendrittel halte man durch kleinere Vertikalstriche auseinander, oder man bilde, wie in dem Beispiel geschehen, gleich drei durchgehende Kolumnen von der 3. Zeile an. Sollten gewisse Drittel gar keine Glieder enthalten, so wird es doch gut sein, trotzdem die Trennungsstriche zu setzen.[1]) In dem Beispiel 11 enthält nur Zeile 5) Ketten in allen drei Dritteln der rechten Hälfte, Zeile 3) nur zweites und drittes Drittel, Zeile 4) nur ein drittes Drittel, Zeile 6) nur die zwei ersten Drittel. Für die Ketten der ersten zwei Drittel ist durch die untergeschriebenen Summen angedeutet, aus welchen Unterketten und Buchstabengruppen G sie zusammengesetzt sind.

II. Bildung von Ketten, deren Schema ein gegebenes ist.

19. Man würde sich den Gegenstand dieses Aufsatzes zu einfach vorstellen und den Zweck der Aufstellung eines so allgemeinen Schema's nicht einsehen, so lange man nur an die gewöhnlich sich darbietende Art der Verkettung denken wollte. Die gewöhnlichsten Ketten haben ein Schema, dem abgesehen von Zeile 2) die rechte Hälfte ganz fehlt. Unser Begriff der Verkettung ist aber ein viel weiterer, und es kann das Zusammenhängen

1) Aehnliches gilt für die Trennungsstriche der Hälften.

einer Anzahl von Ringen in viel absonderlicheren Weisen stattfinden, auf welche eben hingewiesen werden soll.

20. Dies wird ersichtlich, wenn wir zeigen, dass jedes Schema eine Beschreibung wirklich vorhandener darstellbarer Ketten liefert.

Wir sagen: jedes Schema; vorausgesetzt ist dabei natürlich, dass ein Schema stets die Buchstabenbezeichnung jener Ketten und Unterketten enthalten muss, welche aus anderen Unterketten mit Nothwendigkeit sich ergeben. Es ist z. B. keine Kette denkbar, deren Schema die Glieder AB und AC enthält, ohne zugleich das Glied ABC zu enthalten.

Es genügt für unseren Zweck, anzugeben, wie man zu einem beliebig gegebenen Schema irgend eine zugehörige Kette construirt, und es liegt uns fern, die Gesammtheit der durch das Schema beschriebenen Ketten erschöpfen zu wollen.

21. Es kann hier das Geständniss nicht umgangen werden, dass die folgenden Nachweise an dem allen jenen Verschlingungs- und Verknotungsuntersuchungen gemeinsamen Uebel kranken, welche über die durch Anwendung des Gauss'schen Verschlingungsintegrals gesteckte Grenze hinausgehen. Eine mathematisch strenge und auf jeden Fall anwendbare Formulirung der Merkmale, wann zwei oder mehr Ringe untrennbar verbunden sind, liegt zur Zeit nicht vor, trotz mancher in dieser Richtung gemachten Anstrengungen. Wie die meisten der bekannten Tait'schen und Simony'schen Untersuchungen sind daher auch die folgenden vorläufig zum Theile auf den Boden der Empirie gestellt.

Eine allgemeine Methode.

22. Jedermann weiss, dass man zwei Ringe nach Maassgabe von Fig. 3 Taf. II mit einander verketten und durch

Aufschneiden des einen von beiden wieder von einander frei machen kann.

23. Auffälliger ist schon die Möglichkeit, 3 Ringe so ineinander zu verflechten, dass kein Paar derselben verkettet ist, sondern alle drei Ringe frei werden, sobald ein beliebiger aufgeschnitten wird.

Tait gibt ein Beispiel für diese Möglichkeit, welches wir in Fig. 2 reproduciren.[1])

24. Wir sind nun weiter gegangen und haben in Fig. 4 und Fig. 5 Taf. II Ketten von 4, resp. 5 Ringen gebildet, welche ganz entsprechende Eigenschaften zeigen, d. h. sofort vollständig zerfallen, sobald irgend einer der Ringe aufgeschnitten wird.

Ja, es lässt sich allgemein folgender, auf den ersten Blick sehr unwahrscheinliche Satz behaupten:

25. Es lassen sich beliebig viele Ringe R so zu einer Kette K verbinden, dass in K gar keine Unterketten vorhanden sind. Zerschneidet man einen einzigen ganz beliebigen der Ringe R, so werden sofort sämmtliche R frei von einander.

26. Nachdruck ist darauf zu legen, dass das Zerfallen bei der Zerschneidung eines ganz beliebigen der Ringe eintritt, denn Beispiele für Ketten aus n Ringen, die bei Zerschneidung eines bestimmten Ringes in ihre Elemente zerfallen, liegen auf der Hand: Man denke sich nur beliebig viele Ringe auf einen andern aufgereiht, wodurch eine Kette entsteht, deren rechte Schemahälfte die Form

1) $A, B, C \, . \, . \, . \, . \, . \; N$

2) $AB, AC \, . \, . \, . \, . \; AN$

hat, und welche beim Zerschneiden des Ringes A, aber keines andern in ihre Elemente zerfällt.

---

1) Siehe Citat bei 2.

27. Wir wollen ein Verfahren angeben, welches Ketten obiger Art herzustellen gestattet. Um es hinlänglich zu illustriren, ist es in den Figg. 3 (Taf. II), 6 und 7 (Taf. IV), 8 und 9 (Tafel III) für 2, 3, 4, 5 und 6 Ringe ersichtlich gemacht.

28. Allgemein gesprochen werden dabei, wenn n Ringe eine Kette sub 25. bilden sollen, $n-1$ derselben, $A_2, A_3, A_4 \dots A_n$, der Uebersichtlichkeit wegen wie ein System concentrischer Kreise angeordnet, ein n-ter, A_1, in eigenthümlicher Weise in dieselben verflochten. Zur Beschreibung des Verfahrens dient am besten die vollständige Induction. Um die Art des Fortschreitens von n zu $n+1$ Ringen zu characterisiren, wird es genügen, in Worte zu fassen, wie aus der Kette von 5 Gliedern die von 6 Gliedern abgeleitet wird.

29. In Fig. 9 tritt zu den 4 concentrischen Ringen A_2, A_3, A_4, A_5 der Fig. 8 ein weiterer, A_6, aussen hinzu. Die Lage des durchgeflochtenen Ringes A_1 gegen A_2, A_3, A_4 bleibt vollständig ungeändert, die Aenderung der Verknüpfungsart äussert sich nur an seinem Verhalten gegen den früher äussersten Ring A_5 und den neuen A_6.

30. Für A_5 steigt die Zahl der „Ueberkreuzungen" mit A_1 auf das doppelte; man kann sagen, an Stelle jeder bisherigen Ueberkreuzung treten zwei neue, z. B. an Stelle[1]) von x_1 in Fig. 8 tritt x_1 und x_2 in Fig. 9, an Stelle von x_3 in Fig. 8 x_5 und x_6 in Fig. 9.

31. In Fig. 8 geht der Ring A_1 von einer Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl zur nächsten rechts immer so fort, dass er dabei von einer Seite des Ringes A_5 auf die andere tritt. In Fig. 9 hingegen geht der Ring A_1 von einer Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl zur nächsten rechts so fort,

1) Wir numeriren auf den concentrischen A die Ueberkreuzungen von links nach rechts, wie auf den Figuren zu sehen, und bezeichnen eine Ueberkreuzung mit x und ihrer Ordnungszahl als Index.

dass er auf der nemlichen Seite von A_5 bleibt. In Fig. 8 fand zwischen zwei Ueberkreuzungen $x_{2\nu+1}$ und $x_{2\nu+2}$ ein Umfangen, Unterqueren von A_5 durch A_1 statt; an dessen Stelle tritt jetzt sozusagen ein „Reiten" von A_1 auf A_5 zwischen zwei Paaren von Ueberkreuzungen $x_{4\nu+1}$, $x_{4\nu+2}$ und $x_{4\nu+3}$, $x_{4\nu+4}$, indem A_1 auf jeder Seite von A_5 eine Schleife herabhängen lässt. In Fig. 9 befindet sich ferner allgemein bei x_{2n-1} und x_{2n} A_1 auf der nemlichen Seite von A_5 wie in Fig. 8 bei x_n.

32. Nun zu A_6! Mit diesem Ring bildet A_1 geradesoviel Ueberkreuzungen wie mit A_5 und wir nennen die Ueberkreuzungen gleicher Ordnungszahl auf A_5 und A_6 entsprechende. Die Ueberkreuzungen entstehen, indem A_6 jede der von A_5 herabhängenden Schleifen einmal durchbohrt. A_1 befindet sich daher, gerade im Gegensatz zu dem Verhalten entsprechender Ueberkreuzungen auf A_5, auf verschiedenen Seiten von A_6, wenn man eine Ueberkreuzung ungerader Ordnungszahl und die rechts folgende ins Auge fasst.

Ferner:

33. Bezeichnet man das Vornlaufen von A_1 bei einer Ueberkreuzung mit v, das Hintenlaufen mit h, so entspricht jeder Reihe von Ueberkreuzungen eine Reihe von Buchstaben v, h, und es gilt die Regel: Einer Buchstabenfolge $vv\ hh$ resp. $hh\ vv$ auf A_5 muss eine symmetrische Buchstabenfolge auf A_6 entsprechen, also entweder $vhhv$ oder $hvvh$.

Schliesslich:

34. Symmetrieen von Buchstabenfolgen auf A_5 müssen in den entsprechenden Buchstabenfolgen von A_6 erhalten bleiben.

35. Durch die unter 30—34 gegebenen Regeln sind nun auf A_6 die Ueberkreuzungen vollständig bestimmt bis auf eine beliebige, die zu Anfang willkürlich gewählt werden

darf. Wir dürfen also z. B. bestimmen, dass die Ueberkreuzung der Ordnungszahl 1 stets den Buchstaben *v* zugetheilt erhält.

36. Es lässt sich die Anordnung der Ueberkreuzungen durch ein Schema wiedergeben, indem man die Ueberkreuzungsbuchstaben der Ringe A_2, A_3 . . . in aufeinanderfolgende, mit A_2, A_3 . . . bezeichnete Zeilen setzt.

Für zwei Ringe erhält man das Schema:

A_2: *v h*

für drei Ringe:

A_2: *v v h h*
A_3: *v h* | *h v*

für vier Ringe:

A_2: *v v h h*
A_3: *v v h h* | *h h v v*
A_4: *v h h v* | *v h h v*

für fünf Ringe:

A_2: *v v h h*
A_3: *v v h h* | *h h v v*
A_4: *v v h h* | *h h v v* | *v v h h* | *h h v v*
A_5: *v h h v* | *v h h v* | *v h h v* | *v h h v*

etc. etc.

Die senkrechten Linien deuten Symmetriemitten an, und setzen sich, wenn sie in einer Zeile zum Vorschein gekommen sind, nach unten durch alle folgenden Zeilen fort.

37. Dass ein nach diesen Vorschriften gebildetes System wirklich eine Kette bildet, davon mag man sich durch das Experiment überzeugen. Vergl. übrigens 21.

38. Dass diese Ketten aber bei Zerschneidung eines einzigen beliebigen Ringes sofort in ihre sämmtlichen Elemente zerfallen, soll jetzt eingehend gezeigt werden.

Selbstverständlich ist das Zerfallen, wenn der zerschnittene Ring gerade A_1 ist.

Zerschneidet und entfernt man den äussersten Ring, so kann A_1, weil es auf den übrigen Ringen nur „reitet“, einfach von ihnen abgehoben werden, wie ein Reiter vom Ross.

Zerschneidet und entfernt (= „löscht“) man den zweiten Ring von aussen, so kann man alle Schleifen, mit denen A_1 auf diesem Ringe „ritt“, nach unten fallen lassen, wofür die von der Mitte dieser Schleifen ausgehenden Symmetrieen von Wichtigkeit sind, und findet dann den äussersten Ring nirgends mehr unterquert. Daher steht dem Abheben des Ringes A_1, der auf den Ringen innerhalb des zerschnittenen nur reitet, nichts im Wege.

Löscht man den dritten Ring von aussen, so werden die auf diesem reitenden Schleifen frei, und lassen sich, wieder in Folge der Symmetrieen, die in den zwei äusseren Ringen von ihren Mitten ausgehen, durch einfaches Abwickeln resp. Durchschieben ganz aus denselben herausflechten. Auf den weiter innen liegenden Ringen findet wieder nur ein Reiten statt und dem Abheben von A_1 steht nichts im Wege.

39. Ueberhaupt: Löscht man einen beliebigen der concentrischen Ringe, so besteht die sichtbarliche Freimachung des Ringes A_1 von den übrigen nach Richtung der äussern in einem Abwickeln und Durchschieben der Schleifen, welche auf dem zerschnittenen Ringe geritten waren, nach Richtung der innern Ringe in einem Abheben. Die erste Operation ist stets wesentlich bedingt durch die von der Mitte jener Schleifen ausgehenden Symmetrieen der Ueberkreuzungsbuchstaben, welche die Ueberkreuzungen stets paarweise aufzuheben gestatten.

Dass nach Ausflechtung von A_1 die übrigen Ringe alle frei sind, ist von selbst klar.

40. Wir werden nun keine Schwierigkeit haben, auch die Möglichkeit des folgenden einzusehen:

Beliebige von einander freie Ketten A, $B \ldots . N$, bestehend aus Ringen $A_1, A_2 \ldots A_\alpha$; $B_1, B_2 \ldots B_\beta$; $\ldots . N_1\ N_2 \ldots N_\nu$ respective können in der Weise zu einer Kette P vereinigt werden, dass, beim Zerschneiden eines einzigen beliebigen Ringes, P in die sämmtlichen Ketten A, B, $\ldots N$ zerfällt. Besser gesagt: Das Resultat der Aufschneidung ist das nemliche, als ob der Schnitt an den von einander freien Ketten A, $B \ldots N$ ausgeführt worden wäre.

41. Man denke sich in den Figg. 3, 6, 7, 8, 9 die Ringe, statt sie in den ungezeichneten, resp. punctirten Theilen kreisförmig und von einander frei zu ergänzen, dort beliebig mit einander verschlungen, oder anders gesprochen: Man zerre aus den beliebig mit einander verketteten oder nicht verketteten Ringen $A_1\ A_2 \ldots N_\nu$ Theile so hervor, dass sie die Anordnung wie in den als Muster dienenden Figuren 3—9 erhalten, und denke sich einen beliebigen derselben wie A_1 in die andern hineingeflochten. Bei der an unseren Ringen (s. 1) vorausgesetzten unbegrenzten Dehnbarkeit ist dies stets zulässig. Sobald man eine der Curven A_1, $A_2 \ldots N_\nu$ zerschneidet, bedeutet die neu hinzugekommene Verflechtung nur eine für den Verkettungszustand des Systems irrelevante Lagenänderung, die Ketten A, $B \ldots N$ trennen sich.

42. Man könnte einen Augenblick denken, dass die neu hinzugefügte Verkettung früher vorhandene Verkettungen zerstören könnte, indem sich neue Ueberkreuzungen gegen alte aufheben liessen. Alsdann würden wir nicht wissen, ob bei unserem Versuch, aus A, $\ldots N$ eine einzige Kette P zu bilden, nicht vielmehr frühere Ketten in Unterketten zerfielen und würden in grosser Verwirrung sein. In Wahrheit ist die Gefahr nicht vorhanden; weil eben die neue Verkettung nur für die Gesammtheit der Ringe wirksam (s.

oben 41) und somit für die anfangs vorhandenen Verkettungen, die sich nur auf einen Theil der Ringe beziehen, völlig belanglos ist.

43. Das geschilderte Verfahren reicht vollkommen aus, um bei beliebig gegebenem Schema eine dementsprechende Kette zu bilden. Man bilde der Reihe nach die in der rechten Schemahälfte vorkommenden Unterketten, die der linken Hälfte entstehen dann von selbst. Die Möglichkeit, dass Ringe oder Unterketten zu einer Kette zusammentreten, nachdem sie schon zur Bildung andrer Ketten verwendet und in denselben befangen sind, stört in keiner Weise. Es macht also gar nichts, dass z. B. nach zwei Ketten $a\,b\,c\,d$ und $e\,f\,g\,h$ eine Kette $a\,c\,f\,g$ im Schema auftreten kann. Nur ein Paar Worte sind oben in 42 zu verändern, um die dortigen Schlussfolgerungen auch auf diesen Fall anzuwenden.

Andre Methoden, um speciell Ketten ohne Unterketten zu bilden.

44. Da speciell die Ketten ohne Unterketten, welche unter 25. erwähnt sind, einiges Interesse erwecken dürften, so sollen noch zwei andre Methoden angegeben werden, um solche Ketten zu bilden.

45. Man denke sich auf eine Ebene einen kreisförmigen Ring B gelegt, darüber einen ebensolchen Ring A, so dass die beiden Kreisflächen sich zum grössten Theile überdecken, und A etwas mehr nach links liegt. Dann schlage man — die Ebene wird weggedacht — den Theil des Ringes A, der innerhalb des Umfanges von B liegt, nach unten und links, den Theil von B, der innerhalb A liegt, nach oben und rechts, so werden A und B nach dem Muster von Fig. 11 zusammengesetzt sein. Operation wie Resultat wollen wir mit dem Symbol $[A\,B]$ bezeichnen. $[A\,B]$ bildet keine Kette, sondern die beiden Ringe sind frei von einander.

46. $[A\,B]$ erinnert, so wie es in Fig. 10 gezeichnet ist, mit den bei p und q nahe sich umwindenden und im übrigen eng nebeneinanderherlaufenden Strängen, selbst an die Gestalt eines Ringes, der bei r seinen Durchgang hat und kreisförmig verläuft.

47. Diese Vorstellung des Ringartigen bei $[A\,B]$ lässt sich verstärken und die Handhabung des Gebildes als Ring erleichtern dadurch, dass man $[A\,B]$ in das Innere eines Hohlringes eingeschlossen denkt, resp. einschliesst, der es wie eine Haut umgibt und zusammenhält. Natürlich kann die Hilfsvorstellung resp. Hilfsvorrichtung des Hohlringes jederzeit wieder beseitigt werden.

48. Es wird jetzt, und noch mehr durch die folgende Verwendung, erklärlich sein, warum wir das Gebilde $[A\,B]$ als „Systemring" uns zu bezeichnen erlauben, trotzdem es nicht ein Ring nach der Definition 1 ist.

49. Wir können in dem Systemring $[A\,B]$ offenbar an Stelle von A und B selbst Systemringe treten lassen, wodurch Gebilde der symbolischen Bezeichnung

$$\big[[A\,B]\,C\big],\quad \big[A\,[B\,C]\big],\quad \big[[A\,B]\,[C\,D]\big]$$

entstehen, die selbst wieder als „Systemringe" bezeichnet und gehandhabt werden dürfen.

Man kann mit diesen Systemringen wieder die nemlichen Operationen vornehmen, wie mit den bisherigen einfachern, also z. B. Gebilde der symbolischen Bezeichnung

$$\big[[A\,B]\,[C\,D]\,E\big],\quad \big[[A\,B]\,[C\,D]\,[E\,F]\big] \text{ etc.}$$

herstellen, wodurch man zu immer complicirteren Systemringen gelangt.

50. Jeder Systemring S hat die Eigenschaft, aus zwei einfacheren Systemringen (resp. Ringen) S_1 und S_2 zusammengesetzt zu sein, und einen Hauptdurchgang zu besitzen,

der einerseits durch die Stränge von S_1, andrerseits durch die von S_2 begrenzt wird.

51. Keiner der behandelten Systemringe bildet eine Kette; sie bestehen aus lauter freien, nur in eigenthümlicher Weise zusammengelegten Ringen.

Sobald jedoch durch die Hauptöffnung eines solchen Systemringes S ein Ring oder andrer Systemring T geführt wird in der Weise, dass eine Verkettung stattfinden würde, sobald an Stelle von S und T einfache Ringe träten — am einfachsten also nach Muster von Fig. 3 —, so sind auf einmal sämmtliche Ringe mit einander verkettet und zwar liegt dann eine Kette ohne Unterkette vor. Der Schlussring versperrt sämmtlichen Ringen die Wege, auf denen sie aus den andern hervorgezogen und von ihnen frei gemacht werden könnten. Man überzeuge sich durch Experimente und erinnere sich an 21.

52. Dass ein vollständiges Zerfallen eintritt, sobald ein Ring R_1 in einem der Systemringe, sagen wir in S_1, zerschnitten wird, lässt sich folgendermaassen klar machen:

Innerhalb S ist R_1 jedenfalls mit einem andern Ring oder Systemring R_2 nach Muster von Fig. 11 zusammengelegt, später eventuell noch gefaltet worden. Führen wir den Schnitt an R_1 in der Nähe von p,[1]) so lässt sich dort der Systemring auseinanderzerren, ganz gleichgültig, welche Verbindungen er noch mit andern Ringen eingegangen ist, und verhält sich in Folge dessen in Bezug auf seinen Hauptdurchgang r nicht mehr wie ein Ring, sondern wie ein zweiendiger Faden. $[R_1 R_2]$ war wieder mit einem andern Ring oder Systemring R_3 zu einem Systemring zusammengelegt worden, der sich nach der mit $[R_1 R_2]$ vorgegangenen Veränderung selbst wie ein zweiendiger Faden verhält; etc. etc.

1) Nur der bequemeren Vorstellung wegen; die Stelle, wo der Schnitt geführt wird, ist gleichgültig.

so schliesst man fort und sieht schliesslich, dass S selbst sich wie ein zweiendiger Faden verhält nnd von T befreit werden kann; worauf alles zerfällt, da T allein ja keine Kette bildet.

53. Ein weiteres ganz besonders einfaches und symmetrisches Verfahren, um Ketten mit beliebig vielen Ringen ohne Unterketten zu bilden, ist durch Fig. 42 angedeutet. Es ist nur ein Stück der Kette gezeichnet, welche unter stets gleicher Wiederholung der Glieder, in Richtung des Pfeilbogens in sich zurücklaufend zu denken ist.

54. Es möge schliesslich noch bemerkt werden, dass diese Ketten mit den vorher unter 51 geschilderten eine viel grössere Verwandtschaft haben, als auf den ersten Blick ersichtlich ist.

III. Zerschneidungszahlen einer Kette.

Charakteristische Zahlen einer Kette im Allgemeinen.

55. Der für unsere Vorstellung einfachste Zustand von n Ringen ist der, wo sie sämmtlich unverkettet sind. Wir sind daher geneigt, jede Kette daraufhin zu beurtheilen, ob sie diesem Zustande nah oder ferne steht, und bezeichnen dementsprechend die Ringe als schwächer oder stärker verkettet. Diesen Grad der Verkettung kann man durch verschiedene charakteristische Zahlen darzustellen, zu messen versuchen.

56. Um eine erste derselben zu definiren, stellen wir uns die undurchdringlich gedachten Ringe einen Augenblick als durchdringlich für einander vor, und definiren sie als die geringste Anzahl der gegenseitigen Ringdurchdringungen, welche nöthig wird, um sämmtliche Ringe von einander zu trennen. Ueber diese Zahl sagt uns unser Schema gar nichts

aus, und um sie zu untersuchen, müssten wir über den Rahmen dieses Aufsatzes hinausgehen. Wir schreiten daher zu einer andern charakteristischen Zahl fort.

57. Vorausschickend bemerken wir, dass unter einem Querschnitt ein Schnitt verstanden werden soll, der einem Faden seine ringförmige Natur nimmt, und ihn in einen solchen mit zwei Enden verwandelt.

58. Man kann sich nun fragen: Welches ist die geringste Anzahl von Querschnitten, welche man an den gedachten Ringen ausführen muss, um dieselben sämmtlich von einander frei zu machen?

59. Und andrerseits: Welches ist die grösste Anzahl von Querschnitten, die man zur Zerfällung der Ketten in ihre Bestandtheile ausführen kann unter der Bedingung, dass nie ein bereits frei gewordener Ring zerschnitten wird?

60. Wir nennen die erste Zahl kurz die Minimalzerschneidungszahl, die zweite die Maximalzerschneidungszahl unseres Ringsystems.

Ableitung der Zerschneidungszahlen für eine specielle Art von Ketten.

61. Wir behandeln zunächst die Zerschneidungszahlen solcher Ketten, in deren Schema die linke Hälfte vollständig fehlt.

Ein solches Schema enthält kein einziges Glied, dessen Vorhandensein aus Gliedern, die in vorhergehenden Zeilen angeschrieben sind, nothwendig folgen würde, wie etwa aus zwei Gliedern AB und BC der zweiten Zeile nothwendig ein Glied ABC für die dritte Zeile sich ergibt.

62. Wenn zwei in einem solchen Schema vorkommende (Ketten resp.) Unterketten Ringe gemeinsam haben, so muss eine derselben sämmtliche Ringe der andern enthalten, mit

andern Worten: Unterketten des Schema's, welche Ringe gemeinsam haben, können einander nicht coordinirt, sondern eine von beiden muss der andern subordinirt sein.

63. Daraus folgt:

1) Die in den Gliedern einer Zeile auftretenden Ringe müssen sämmtlich von einander verschieden sein, somit können das zweite und dritte Drittel einer Zeile keine Ringe gemeinsam haben wie im allgemeinen Falle.

2) Die in den Gliedern des dritten Drittels vorkommenden Ringe sind sämmtlich von einander verschieden, während beim allgemeinen Falle im dritten Drittel ein und derselben Zeile gleiche Ringe in verschiedenen Gliedern vorkommen können.

3) Schneidet man einen Ring einer Kette des letzten Drittels auf, so werden sofort alle Ringe dieser Kette gänzlich frei, nicht bloss frei von einander.

Denn bliebe ein Theil T der Ringe dieser Kette, welche ausserdem noch die durch T' angedeuteten Ringe enthalten soll, mit nicht in der Kette enthaltenen Ringen U verkettet, so würde eine Kette mit den Gliedern $T + T' + U$ sich ergeben, die aus den Ketten $T + T'$ und $T' + U$ ableitbar und daher in die linke Seite des Schema's zu setzen wäre, welche doch frei bleiben soll. Dass die Ringe T allein für sich zum Theil verkettet bleiben, ist ersichtlich ebenfalls ausgeschlossen.

Minimalzerschneidnngszahl μ.

64. Es ist klar, dass, um das Ringsystem in seine Elemente zu zerlegen, in jeder Kette des dritten Drittels ein Schnitt geführt werden muss, da diese Ketten anders nicht aufgelöst werden können, und keiner dieser Schnitte seinen Einfluss auf zwei Ketten des dritten Drittels erstreckt.

65. Andrerseits folgt aus Satz 3) des letzten Abschnittes 63, dass nach Ausführung dieser Schnitte sämmtliche Ringe

vollständig frei sind. Die Minimalzerschneidungszahl ist also hier gleich der Anzahl der Glieder des dritten Drittels:

$$\mu = \delta_3.$$

66. Um eine deutlichere Einsicht von der Richtigkeit dieses Satzes zu bekommen, könnte man den Einfluss der successiven Schnitte auf den Verkettungszustand des Ringsystems verfolgen, was wir aber hier der Kürze halber übergehen.

Maximalzerschneidungszahl M.

67. Bei Ableitung der Maximalzerschneidungszahl wird ein Umstand wichtig, der bei Ableitung der Minimalzerschneidungszahl belanglos war: Die Reihenfolge der Schnitte.

68. Sind M Ringe gefunden, bei deren Zerschneidung in bestimmter Reihenfolge das Ringsystem erst mit dem M-ten Schnitte in seine Elemente zerfällt, so gibt es sicher andre Reihenfolgen, bei deren Einhalten dieses Zerfallen vor dem M-ten Schnitte eintritt.

69. Jedenfalls lässt sich aus den M Ringen ein System von δ_3 Ringen herausheben, das mit jeder im dritten Drittel stehenden Kette nur je einen Ring gemein hat. δ_3 ist dann die Minimalzerschneidungszahl μ, s. den Schluss des vorigen Abschnittes, und das ganze System zerfällt schon nach dem μ-ten Schnitte, wenn man gerade die herausgehobenen μ Ringe zuerst aufschneidet.

70. Die $M-\mu$ übrigen Ringe können offenbar nicht in Ketten des dritten Drittels vorkommen, da sonst mindestens in einer derselben zwei Ringe aufgeschnitten würden. Dies hiesse aber, einen bereits ganz freigewordenen Ring aufschneiden (s. 63. 3)), was ausgeschlossen sein soll (s. 59). Es müssen daher Ringe sein, deren erstes Auftreten im zweiten Drittel erfolgt, als zu Gruppen G gehörig (s. 16). Schneidet man einen solchen Ring auf, so zerfällt die be-

treffende Kette in die zur Gruppe G gehörigen Ringe und in Unterketten, welche bereits in früheren Zeilen vorkommen; ausserdem können in den ersten zwei Dritteln von folgenden Zeilen dadurch Kettenzertheilungen eintreten, nicht aber in vorhergehenden. Die Ketten des letzten Drittels bleiben ganz unbeeinflusst.

71. Um nun die Zerfällung des ganzen Systems erst nach möglichst viel Schnitten eintreten zu lassen, beginne man in der letzten Zeile, welche ein zweites Drittel aufweist, und schneide in jedem Gliede des zweiten Drittels einen, gleichgültig welchen Ring der Gruppe G auf. Dann behandle man nach dem nemlichen Verfahren die vorhergehende Zeile, und so fort. Schliesslich wird man in jedem Gliede des zweiten Drittels einen Schnitt geführt haben, im Ganzen δ_2 Schnitte. Hierauf lässt sich aber kein weiterer Schnitt machen, der nicht eine Kette des letzten Drittels angreifen würde.

72. Die Maximalzerschneidungszahl ergibt sich nach diesen Betrachtungen gleich der Summe der Anzahlen der in den letzten Dritteln stehenden Glieder:

$$M = \delta_2 + \mu = \delta_2 + \delta_3.$$

73. Es ist auch klar, dass die Zerschneidungszahl des Systems jeden zwischen μ und M liegenden Werth annehmen kann. Man kann ja von den δ_2 Schnitten im zweiten Drittel (s. 71) eine beliebige Theilanzahl ausführen und dann zu den μ Schnitten im dritten Drittel übergehen (s. 69).

Die Zerschneidungszahlen für allgemeine Formen der Kette.

74. Die Zahlen μ und M lassen sich für Ketten allgemeiner Schemaform nicht in ähnlich einfacher Weise ableiten; man kann einige Regeln angeben, welche unnöthige

Umwege vermeiden lassen, und scheint im Uebrigen auf das Durchprobiren der verschiedenen Möglichkeiten angewiesen.

75. Zunächst ist für die Aufsuchung von μ wichtig, dass das ganze System dann und erst dann in seine Bestandtheile zerlegt ist, wenn die Glieder des letzten Drittels zweiter Hälfte im Schema in die ihren zerfällt sind. Es handelt sich also darum, diese Glieder durch möglichst wenig Schnitte vollständig zu zerfällen.

76. Geht man die Glieder des letzten Drittels durch und sucht eine Anzahl solcher heraus, welche aus lauter verschiedenen Buchstaben bestehen, es seien die Glieder $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_\nu$, so ist ν eine untere Grenze für μ. Es müssen mindestens ν Ringe $A_1, A_2, A_3 \ldots A_\nu$ zerschnitten werden, welche resp. den Gliedern $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \ldots \Gamma_\nu$ angehören.

Dadurch wird die Auswahl der zu zerschneidenden Ringe unter Umständen wesentlich beschränkt.

77. Für M ist Folgendes zu bemerken;

Jedes Glied des zweiten Drittels rechter Hälfte ist zusammengesetzt aus Gliedern vorhergehender Zeilen und ausserdem aus Ringen G, die zusammen kein vorhergehendes Glied bilden, obwohl sie in solchen vorhergehenden Gliedern vorkommen können. Zunächst kennzeichne man in jedem Gliede die Ringe G; weiterhin unter diesen wieder die, welche in keinem Glied des letzten Drittels vorkommen: sie mögen G' heissen. Durch Zerschneiden eines G' wird ein Glied zweiten Drittels rechter Hälfte in Unterketten vorhergehender Zeilen und die Ringe G zerlegt. Man beginne nun (vgl. 71) damit, in jedem Gliede der letzten Zeile, die ein zweites Drittel enthält, einen Ring G' aufzuschneiden und schreite dann zu vorhergehenden Zeilen weiter.

78. Es ist aber jetzt möglich, dass die Auswahl des G' im einzelnen Gliede nicht mehr gleichgültig ist, wie bei den speciellen Schemata 61, weil sehr wohl einzelne Ringe in

der Gesammtheit der G' mehrfach vorkommen können. Es ist also zu ermitteln, bei welcher Auswahl der zu zerschneidenden G' die meisten Schnitte möglich sind, ehe sämmtliche G sich loslösen.

Es sei M_1 diese Maximalzahl.

79. Dann mache man, ebenfalls durch Probiren die Maximalzahl der Schnitte ausfindig, welche geführt werden kann, bis sämmtliche Ketten im letzten Drittel zerfallen: Sie sei M_2. Dann ist

$$M = M_1 + M_2.$$

80. Fassen wir den Inhalt dieses Aufsatzes noch einmal kurz zusammen:

Die Arbeit bezieht sich auf Ringe, das heisst auf geometrische Gebilde von der Art in sich zurücklaufender Fäden. Den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung bildete der „Verkettungszustand“ eines Ringsystems. Es war dies ein Begriff, der sich nicht auf die specielle Art der Verschlingung und Verknotung von Ringen bezog, sondern nur auf die Thatsache, ob Ringe zusammenhängen oder nicht. Die vollständige Beschreibung des Verkettungszustandes wurde durch ein Schema geliefert, das sämmtliche Ringe, Unterketten und selbständige Ketten eines Ringsystems in passender Anordnung angibt. So weit der erste Theil; im zweiten Theil wurde gezeigt, dass nicht nur jede Kette ihr Schema hat, sondern auch für jedes Schema Ketten existiren, und hiebei besonders auf eine Art von Ketten hingewiesen, welche keine Unterketten enthalten. Im dritten Kapitel wurde von den Zerschneidungszahlen der Ketten gehandelt, charakteristischen Zahlen, welche ein gewisses Maass für den Verkettungszustand abgeben.

Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme.

Von Walter Dyck.

(Zweite Mitteilung.)

(Mit Tafel V—VII.)

(Eingelaufen 6. April.)

§ 1.
Einleitung.

In einer ersten Abhandlung „Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme“[1]) habe ich den Verlauf dieser Curvensysteme in der Umgebung ihrer „wesentlich“ und „ausserwesentlich singulären“ Stellen einer genaueren Betrachtung unterzogen und dabei auch die Frage nach dem „Gesammtverlauf“ eines solchen Curvensystems aus der Kenntniss von Lage und Charakter der

1) Berichte der k. bayer. Akad. d. Wiss. 21. Bd. 1891. p. 23 ff. Auf diese Abhandlung, die in der Folge durch [Abh. I.] citirt ist, sei auch bezüglich der Litteratur über den Gegenstand verwiesen. Fundamental für die folgenden Entwicklungen ist selbstverständlich wieder die Abhandlung von Briot und Bouquet „Sur les propriétés des fonctions définies par des équations differentielles“ im 36. Heft des Journal de l'école polyt.

einzelnen singulären Stellen discutirt und zwar je für die verschiedenen Blätter, in welchen sich das Curvensystem über der $(x\,y)$-Ebene ausbreitet.

Im Folgenden ist ein anderer Weg eingeschlagen, um über den Gesammtverlauf der Integral-Curven einer Differentialgleichung erster Ordnung Aufschluss zu erhalten: Man betrachte durch Einführung eines Parameters die einzelne Differentialgleichung als Glied einer Reihe von continuirlich in einander übergehenden Differentialgleichungen und studire die Aenderungen, welche die Integralcurven durch eine solche stetige Abänderung der Differentialgleichung erleiden.

Es bleibt dann bei dieser continuirlichen Abänderung der Gesammtcharacter des Curvensystems im Allgemeinen erhalten und ändert sich nur an gewissen Sprungstellen durch Entstehen, Umformung und Verschwinden von singulären Punkten.

Dabei bezieht sich der schon in Abh. I. gebrauchte Ausdruck „Gesammtcharacter" wie dort auch hier wieder auf die Art und Verteilung der singulären Stellen, auf die im Sinne der Analysis situs genommene Anordnung der verschiedenen Blätter und des darin näherungsweise darzustellenden Verlaufes der einzelnen Curvenzweige. Eigenschaften von Integralcurven dagegen, wie die, sich zu schliessen, oder noch specieller, algebraisch zu sein, fallen hier ausser Betracht, denn sie werden im Allgemeinen bei einer infinitesimalen Aenderung der Differentialgleichung verloren gehen.

So versucht die vorliegende Abhandlung eine Darstellung derjenigen Eigenschaften des Integralcurvensystems einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche bei im Sinne der Analysis situs nicht wesentlichen Umformungen der Differentialgleichung erhalten bleiben durch die Darlegung

derjenigen Aenderungen, welche das Integralsystem bei den im Sinne der Analysis situs wesentlichen Umänderungen erleidet.

Das System der Differentialgleichungen, welches wir in seiner continuirlichen Umformung untersuchen, ist nun das folgende:

$$F(x, y, y') - k = 0$$

mit k als Parameter. Hier werden die analytischen Formulirungen von einfachster Art, sind aber doch allgemein genug, um das Verhalten solcher Umformungen auch in anderen einfach unendlichen Systemen von Differentialgleichungen übersehen zu können.

Weiter legen wir im Folgenden die Function $F(x,y,y')$ von „algebraischem Character" als eine reelle, eindeutige Function der reellen Veränderlichen x, y, y' zu Grunde, die nur für endliche Werte dieser Variabeln verschwindet, an jeder Stelle x_0, y_0, y'_0 nach ganzen Potenzen von $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(y'-y'_0)$ entwickelbar ist und deren drei Ableitungen nach den Variabeln nur für discrete Werte derselben gleichzeitig verschwinden.

Machen wir von der vielfach anzuwendenden Vorstellung des Systems $F(x, y, y') - k = 0$ als eines Systems von Flächen in einem Raume mit den Coordinaten x, y, y' Gebrauch, so entspricht den eben gemachten Annahmen die Vorstellung eines Systems von ganz im Endlichen gelegenen, einander nicht schneidenden, geschlossenen Flächen, die den Raum gerade einfach durchsetzen.[1]) Auf jeder solchen Fläche

1) Hiezu sei erwähnt: Durch die obige Bedingung schliessen wir auch das Auftreten von sog. Unbestimmtheitspunkten aus, denen in unserer Flächendeutung das Auftreten einer zur xy-Ebene senkrechten Geraden $x=x_0$, $y=y_0$ entspricht. Eine beiläufige Bemerkung der Abh. I. (pag. 30 oben) ist selbstverständlich unrichtig, wenn es



ist das ihr entsprechende System der Integralcurven einfach überdeckend, ausgebreitet.

Die wichtigsten Umformungen dieses Curvensystems entsprechen denjenigen Umänderungen der Flächen des Systems, bei welchen die characteristische Zahl (Zusammenhangszahl) der Fläche sich ändert. Ihnen entsprechen Aenderungen in der Anzahl der singulären Punkte des Curvensystems, den Relationen zufolge, welche diese Anzahlen mit der characteristischen Zahl verknüpfen.[1]) Alle übrigen Aenderungen, die bei der continuirlichen Umformung im Verlaufe des Curvensystems auftreten, sind — auch wenn dabei singuläre Stellen auftreten oder verschwinden oder sich umformen — so beschaffen, dass sie jene characteristischen Relationen nicht ändern.

Nehmen wir nun einmal an, für irgend eine Differentialgleichung des Systems sei der Verlauf der Integralcurven bekannt, so lässt sich die successive Aenderung der Integralcurven mit änderndem k von hier aus anschaulich verfolgen; speciell für die soeben gemachten Annahmen über die Endlichkeit der Fläche $F(x,y,y')=0$ wird es einen Parameterwert k_a geben, für welchen die Fläche $F(x,y,y')-k_a=0$ lediglich aus isolirten Punkten besteht, um von hier aus sich im Raume der x, y, y' continuirlich auszubreiten; dann werden wir von da ab mit der Entstehung des Integralcurvensystems selbst die Discussion der gestaltlichen Verhält-

sich um die Bedingungen für das Eintreten von Unbestimmtheitspunkten im Allgemeinen handeln soll.

Ich nehme Gelegenheit, hier weiter ein Versehen zu berichtigen, welches in Formel (35.) auf pag. 54 untergelaufen ist. Die letzte der dort gegebenen drei Gleichungen ist, wie unmittelbar ersichtlich, zu ersetzen durch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial c \partial y}-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial c \partial x}=0.$$

1) Abh. I pag. 47, 48; Poincaré, Liouville's Journal Serie III Bd. 8, Serie IV Bd. 1.

nisse des Integralsystems beginnen können durch die Bezeichnung der Aenderungen, welche an den näher zu bestimmenden besonderen Stellen für den Verlauf unseres Curvensystems eintreten.

Diese Untersuchung ist im Folgenden ausgeführt, und sind dabei insbesondere diejenigen Umänderungen einer eingehenderen Betrachtung unterzogen, die mit einer gleichzeitigen Aenderung der characteristischen Zahl der Fläche $F-k=0$ verbunden sind; die übrigen bemerkenswerten gestaltlichen Aenderungen sind im Folgenden wesentlich nur in so weit besprochen, als es eine genaue Classification erforderte. Es bieten übrigens, wie gleich hier erwähnt sei, gerade auch diese Fälle (insbesondere die im § 4 und 5 besprochenen) ein weitergehenderes Interesse speciell für den Verfolg der Frage der näherungsweisen Integration einer Differentialgleichung für die Umgebung gewisser singulärer Stellen und zwar deshalb, weil hier die Betrachtung erster Näherungen wegen der geringen Zahl der in den betreffenden Näherungsgliedern noch enthaltenen Constanten singuläre Vorkommnisse herbeiführt, die keineswegs bei Ausdehnung auf eine grössere Gliederzahl noch statthaben. Ich denke darauf in einer ausführlicheren Darlegung einzugehen.

§ 2.

Allgemeine Festsetzungen und Bezeichnungen.

Um das Verhalten der Integralcurven der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad F(x, y, y') - k_0 = 0$$

für die Umgebung einer Stelle x_0, y_0, y'_0 zu untersuchen, entwickeln wir zunächst F in eine Potenzreihe nach $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(y'-y'_0)$ und führen (vergl. Briot-Bouquet a. a. O. pag. 191) in dieselbe die Substitution ein:

$$
(2.)\qquad
\begin{aligned}
x - x_0 &= \xi,\\
(y - y_0) - y'_0\,(x - x_0) &= \eta;\ \text{ wo dann}\\
y' - y'_0 = \eta' &= \frac{d\,\eta}{d\,\xi}.
\end{aligned}
$$

Es kommt dann die folgende Entwickelung:

$$
\begin{aligned}
(3.)\qquad & F(x, y, y') - k_0 \equiv \\
& (\overline{F}_1 + y'_0\,\overline{F}_2)\,\xi + \overline{F}_2\,\eta + \overline{F}_3\,\eta' + \\
& + \tfrac{1}{2}\{(\overline{F}_{11} + 2y'_0\overline{F}_{12} + y'^2_0\overline{F}_{22})\xi^2 + 2(\overline{F}_{12} + y'_0\overline{F}_{22})\xi\eta + \overline{F}_{22}\,\eta^2\} + \\
& + (\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})\,\xi\,\eta' + \overline{F}_{23}\,\eta\,\eta' + \tfrac{1}{2}\,\overline{F}_{23}\,\eta'^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

eine Differentialgleichung, die das gemeinsame Wertesystem

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \eta' = 0$$

als Lösung besitzt.

Wir fügen zur Uebersicht des Folgenden das Diagramm bei, in welchem in der bekannten Weise die einzelnen Glieder in Bezug auf ihre Grössenordnung in ξ und η' (wobei η äquivalent mit $\eta'\,\xi$) eingetragen sind.

Fig. 1.

Die in (2.) gegebene Umformung ist für die Deutung des Verlaufes der Integralcurven in einer Ebene ($\xi\eta$) und für die andere in der Ebene ($x\,y$) selbstverständlich unwesentlich; wir werden im Folgenden von der einen und anderen Ebene Gebrauch machen und ebenso je nach Zweckmässigkeit für die räumliche Anschauung von dem Coordinatensystem x, y, y' und dem andern ξ, η, η'.

Bezüglich der eingeführten Bezeichnungen sei noch erwähnt, dass wir da wo es wünschenswert erscheint, die Werte der Ableitungen von F nach den Variabeln x, y, y' als bestimmt für einen Punkt x_0, y_0, y'_0 hervorzuheben, die Ausdrücke F_1, F_2, F_3, F_{11} u. s. w. wie in Gleichung (3.) mit einem horizontalen Strich versehen, der wegbleibt, wenn die Stelle x, y, y' unbestimmt bleiben soll.

Weiter ist es zweckmässig, die Richtung des Durchlaufens des Systems

$$F(x, y, y') - k = 0$$

auf einfache Weise zu präcisiren. Wir betrachten die Constante k als wachsend. Machen wir die obige Annahme, dass $F(x, y, y')$ nur für endliche Werte der Variabeln verschwindet, so lässt sich das Vorzeichen so normiren, dass F für unendlich grosse Werte der Variabeln positiv ist; indem wir dann von dem untersten Wert k_a des Parameters k, für welchen noch eben ein reelles Wertsystem x, y, y' der Gleichung $F - k_a = 0$ genügt, ausgehen und die Gleichung $(F - k_a) = k$ für unser System einführen, lässt sich der Parameter k als durchaus positive Grösse einführen.

I. Abschnitt.

Die wesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen $F(x, y, y') - k = 0$.

§ 3.

Uebersicht.

Die Stelle x_0, y_0, y'_0 ist wesentlich singulär, wenn gleichzeitig die drei Gleichungen statthaben

$$(4.)\quad \overline{F} - k_0 = 0,\quad \overline{F}_1 + y'_0 \overline{F}_2 = 0,\quad \overline{F}_3 = 0.$$

Das Verhalten des Systems der Integralcurven in der Umgebung einer solchen Stelle ist (Abh. I) näherungsweise gegeben durch die Differentialgleichung:

$$(5.)\quad 0 = \overline{F}_2 \eta + \tfrac{1}{2}(\overline{F}_{11} + 2 y'_0 \overline{F}_{12} + y'^2_0 \overline{F}_{22}) \xi^2 + \\ + (\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23}) \xi \eta' + \tfrac{1}{2} \overline{F}_{33} \eta'^2,$$

welche dem aus Fig. 1 abgeleiteten Diagramm (Fig. 2.) entspricht.

Fig. 2.

Wir bezeichnen wie in (Abh. I) die drei Kategorien der wesentlich singulären Punkte als:

Kateg. I. Punkte P_0 (Taf. I, Fig. I d. Abh. I.)
„ II. „ P_2 (Tafel II, Fig. II.)
„ III. „ P_∞ (Tafel III, Fig. III.)

Dann sind für die Unterscheidung dieser 3 Kategorien die Vorzeichen der folgenden beiden Ausdrücke massgebend

$$(6.)\quad \overline{M} = \begin{vmatrix} \overline{F}_{11} + 2y'_0 \overline{F}_{12} + y'^2_0 \overline{F}_{22} & \overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23} + \overline{F}_2 \\ \overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23} & \overline{F}_{33} \end{vmatrix}$$

und

$$\overline{N} = 4\overline{M} - \overline{F}_2^2$$

und zwar hat man folgende Tabelle der Vorzeichencombinationen:

(7.)

$\overline{M}$	$\overline{N}$	Kategorie
+	+	I (P_0)
+	—	III (P_∞)
—	—	II (P_2)

Denken wir uns nun das System der Differentialgleichungen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

mit änderndem (wachsendem) Parameter k durchlaufen, so werden die jedesmal aus den Gleichungen (4.) zu berechnenden wesentlich singulären Stellen (x_0, y_0, y'_0) eine stetige Aufeinanderfolge bilden. Besonders für den Verlauf der Curven der Integralsysteme werden dann einmal diejenigen Stellen zu beachten sein, für welche einer der Ausdrücke $\overline{M}$ bez. $\overline{N}$ sein Zeichen wechselt, und weiter diejenigen, für welche einer der wesentlichen Terme in der Näherungs-Differentialgleichung (5.) — das sind die Factoren von η und von η'^2 [1]) — verschwindet. Das Verschwinden des Factors $\overline{F}_2$ von η bringt dabei wegen $\overline{F}_1 + y'_0 \overline{F}_2 = 0$ auch das Verschwinden von $\overline{F}_1$ mit sich.

Sonach ergeben sich zur näheren Untersuchung der wesentlich singulären Stellen:

$$(4.) \quad \overline{F} - k_0 = 0, \quad \overline{F}_1 + y'_0 \overline{F}_2 = 0, \quad \overline{F}_3 = 0$$

diejenigen Fälle, für welche noch die Bedingungsgleichungen:

---

1) Man überzeugt sich leicht, dass ein Verschwinden der Factoren von ξ^2 und von $\xi\eta'$ den Character der singulären Stelle im Sinne der Analysis situs nicht wesentlich beeinflusst.

A)	$\overline{M} = 0$	(§ 4.)
B)	$\overline{N} = 0$	(§ 5.)
C)	$\overline{F_1} = 0, \overline{F_2} = 0$	(§ 6–8.)
D)	$\overline{F_{33}} = 0$	(§ 9.)

bestehen.

Bedienen wir uns der schon in der Einleitung erwähnten Deutung der Variabeln x, y, y' als rechtwinkliger Coordinaten des Raumes, so können wir folgendes geometrische Bild bei unseren Betrachtungen einführen:

Das System der einfach unendlich vielen Flächen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

wird geschnitten einmal von der Fläche

$$F_1 + y' F_2 = 0,$$

welche auf den einzelnen Flächen $F - k = 0$ diejenigen Curven ausschneidet, für welche die Integralcurven in der Projection auf die $(x\,y)$-Ebene Wendepunkte besitzen.[1]

Weiter schneidet die Fläche

$$F_3 = 0$$

die Flächen des Systems $F - k = 0$ je in den Umrisslinien U_k in Richtung der y'-Axe; diese Linien, auf die $x\,y$-Ebene projicirt, sind also die Oerter der Spitzen der Integralcurven.

Die Flächen

$$F_1 + y' F_2 = 0 \quad \text{und} \quad F_3 = 0$$

ihrerseits schneiden sich in einer Raumcurve S, welche auf den Flächen $F - k = 0$ je die wesentlich singulären Punkte ausschneidet.

Auf dieser Raumcurve S sind einmal die Punkte ausgezeichnet, für welche $M = 0$ bez. $N = 0$ ist; weiter die-

1) Man vergleiche Darboux „Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre.“ Bulletin des Sciences Mathém. 1. Serie, Bd. IV (1873).

jenigen, für welche gleichzeitig $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ ist. d. h. die Knotenpunkte des Flächensystems $F - k = 0$; endlich die Punkte, welche der Gleichung $F_{33} = 0$ genügen. Für die zu einem dieser letzteren Punkte gehörige Fläche $F - k = 0$ bedeutet die Bedingung $F_{33} = 0$, dass die Umrisscurve der Fläche in ihrer Projection auf die xy-Ebene eine Spitze besitzt. In diese Spitze, welche nach den Betrachtungen der Abh. I. als ausserwesentlich singuläre Stelle des betr. Integralsystems zu bezeichnen ist, rückt hier noch ein wesentlich singulärer Punkt.

§ 4.

A) Die Bedingung $\overline{M} = 0$.

Das Verschwinden der Determinante

$$(8.)\qquad \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{11} + y' F_{21} & F_{12} + y' F_{22} & F_{13} + y' F_{23} + F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

drückt die Bedingung dafür aus, dass die Raumcurve S

$$F_1 + y' F_2 = 0 \quad F_3 = 0$$

eine Fläche

$$F - k = 0$$

berührt. Man erkennt sofort, dass diese Bedingung die Form

$$(9.)\qquad M \cdot F_2 = 0$$

annimmt, in welcher das Verschwinden des letzten Factors die uneigentlichen Berührungen von S in den Knotenpunkten des Flächensystems bezeichnet, die Bedingung

$$M = 0$$

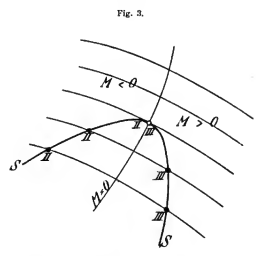
die eigentlichen Berührungen. Dabei trennt die Fläche $M = 0$ in der Umgebung eines solchen Punktes zwei Gebiete der Raumcurve S, für welche beziehungsweise

$$M < 0\,, \quad N < 0$$

und
$$M > 0\,, \quad N < 0$$

ist. Wie Fig. 3 schematisch darstellt, vereinigen sich also, wenn wir das Flächensystem in der einen Richtung durchlaufen, zwei singuläre Punkte, und zwar je ein Punkt II und ein Punkt III mit einander, die dann verschwinden;

Fig. 3.



umgekehrt entstehen zwei solche Punkte an einer Stelle $M = 0$; es findet das eine bez. andere statt, je nachdem die Raumcurve S die Fläche $F - k_0 = 0$ von „innen" bez. von „aussen" berührt, was analytisch auf die Vorzeichenbestimmung eines leicht zu bildenden Determinantenausdruckes hinauskommt. Die gestaltliche Umformung, deren ausführliche rechnerische Behandlung[1]) ich hier übergehe, wird besonders übersichtlich in der Projection auf

1) Bei welcher ausser den in Gleichung (5.) gegebenen, zu einer ersten Näherung dienenden Gliedern auch die nächst höheren notwendig heranzuziehen sind.

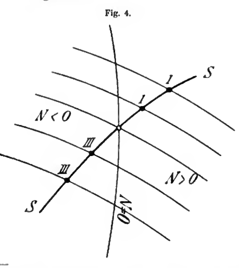
die Ebene $\xi\eta'$, in welcher die Umgebung der singulären Stelle eindeutig dargestellt ist.[1])

§ 5.

B) Die Bedingung $N = 0$.

An denjenigen Stellen der Curve S der singulären Punkte, für welche der Ausdruck N verschwindet, tritt ein besonderes Verhalten der Curve S gegenüber dem Flächensystem $F - k = 0$ nicht ein. Die Curve S tritt, wie Fig. 4. schematisch andeutet, aus einem Gebiete $N < 0$ in ein solches $N > 0$ ein, oder umgekehrt. Dabei ist, wie die auf pag. 108 gegebenen Gleichungen lehren, jedenfalls $M > 0$. Es verwandelt sich also bei änderndem k ein singulärer Punkt III in einen Punkt I oder umgekehrt.

Fig. 4.



1) Von dem Umstand der Eindeutigkeit der Projection auf die $\xi\eta'$-Ebene in gewissen für die $\xi\eta$-Ebene mehrdeutigen Darstellungen ist schon in der Abhandlung I in den Figg. I' II' III' der Tafeln für die dort behandelten Singularitäten Gebrauch gemacht und wir ver-

Die gestaltliche Umformung der singulären Stelle lässt sich an Hand der Figg. III und I (beziehungsweise III' und I') der Abh. I. leicht verfolgen, wenn wir beachten, dass die beiden in der ersten Näherung ausgezeichneten Curvenzweige der Integralcurven, welche den Punkt III durchsetzen, im Grenzfalle zusammenrücken, um dann imaginär zu werden.

§ 6.

C) Die Knotenpunkte des Flächensystems $F-k=0$. Geometrische Discussion.

Die Raumcurve S

$$F_1 + y' F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

durchsetzt die durch die Bedingungen

$$\text{C)} \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

gegebenen Knotenpunkte des Flächensystems $F-k=0$.

Für den Character dieser Stellen ist vor Allem die Lage des Tangentialkegels im Knotenpunkt gegenüber der Raumcurve S und in Bezug auf die Projection auf die xy-Ebene zu bestimmen, und zwar sind vier wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Der Tangentialkegel ist imaginär.

a) Ein elliptisch gekrümmter Flächenteil zieht sich auf einen isolirten Knotenpunk[illegible]

---

wenden denselben auch in der Folge bei den ir[illegible] Singularitäten. Das gleiche Princip, die Verhält[illegible] deutigen Darstellung zu übersehen, liegt selbstverständlich auch den von Briot und Bouquet eingeführten allgemeinen Transformationen zu Grunde und kommt weiter in der auch von Poincaré verwendeten Betrachtungsweise des Integralcurvensystems auf der Fläche $F=0$ zur Geltung.

um dann zu verschwinden, oder umgekehrt entsteht um einen isolirten Punkt ein solcher ellipsoidischer Flächenteil.

Die Raumcurve S durchschneidet diese kleine Fläche in zwei Punkten. Also verschwinden bez. entstehen zwei wesentlich singuläre Punkte, je nachdem der Uebergang in der einen oder andern Richtung statthat. (Vergl. die schematische Fig. 5a.)

Der Tangentialkegel ist reell.

Die Flächen $F - k = 0$ werden derart umgeformt, dass zwei getrennte Flächenteile sich zu einem einzigen vereinigen oder umgekehrt eine Abschnürung eintritt und zwar lässt sich in der Umgebung des Knotenpunktes in bekannter Weise der Uebergang dadurch characterisiren, dass sich zwei elliptisch gekrümmte Flächenteile zu einem hyperbolisch gekrümmten vereinigen bez. eine Trennung eines hyperbolisch gekrümmten in zwei elliptische Flächenteile eintritt. Unterscheiden wir auch die beiden Raumteile, welche der Kegel trennt, als elliptischen, bez. hyperbolischen Teil, so kommt es zunächst darauf an, ob die Curve S in der Umgebung des Knotenpunktes den elliptischen bez. den hyperbolischen Teil des Raumes durchsetzt.

b) Die Raumcurve durchsetzt den elliptischen Raumteil des Kegels.

Beim Uebergang von der elliptisch gekrümmten Fläche zur hyperbolisch gekrümmten rücken zwei wesentlich singuläre Punkte zusammen, um dann zu verschwinden, während beim umgekehrten Uebergang zwei solche Punkte entstehen. (Vergl. die schematische Fig. 5b.)

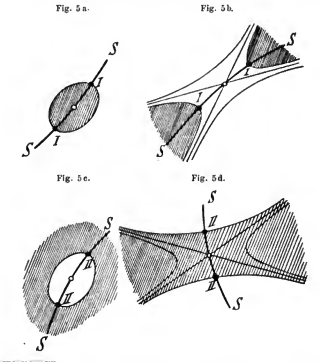
Durchsetzt die Raumcurve S den hyperbolisch gekrümmten Flächenteil, so ist noch eine Unterscheidung bezüglich des Umrisses unseres Kegels in der Projection auf die $(x\,y)$-Ebene zu beachten. Diese kann aus einem ima-

ginären oder einem reellen Paar von geraden Linien bestehen.[1])

c) Die Raumcurve S durchsetzt den hyperbolischen Teil des Kegels; Umriss des Kegels in die $(x\,y)$-Ebene imaginär.

d) Die Raumcurve S durchsetzt den hyperbolischen Teil des Kegels; Umriss des Kegels in die $x\,y$-Ebene reell.

In beiden Fällen c) und d) entstehen beim Uebergang von den elliptisch gekrümmten Flächenteilen zu den hyper-



1) Im Falle b bildet dieser Umriss, wie leicht zu sehen, notwendig ein reelles Geradenpaar, im Falle a selbstverständlich ein imaginäres.

bolisch gekrümmten zwei wesentlich singuläre Punkte, die beim umgekehrten Uebergang verschwinden. (Vergl. die Figg. 5c und 5d.)

In den Figuren ist jedesmal das doppelt überdeckt zu denkende Gebiet derjenigen Fläche schraffirt, welche die singulären Punkte trägt, also bei a) und b) das Gebiet der elliptisch, bei c) und d) der hyperbolisch gekrümmten Fläche.

§ 7.

C) Fortsetzung. Analytische Formulierung.

Die vier Fälle lassen sich nun in einfachster Weise analytisch von einander trennen.

1. Zunächst lässt sich bekanntlich der Unterschied des imaginären vom reellen Kegel nach den gleichen oder ungleichen Vorzeichen der drei Werte, welche die linke Seite der Kegelgleichung für die Kanten irgend eines Polardreikants annimmt, fixiren. Wir wählen als diese Kanten einmal die Tangente an die Raumcurve S, für welche

$$(10.)\quad dx:dy:dy' = \left\| \begin{matrix} \overline{F}_{11}+y'_0\overline{F}_{21} & \overline{F}_{12}+y'_0\overline{F}_{22}, & \overline{F}_{13}+y'_0\overline{F}_{23} \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & \overline{F}_{33} \end{matrix} \right\|$$

ist. Dann lässt sich die Axe y'

$$(11.)\qquad dx:dy:dy' = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

als zweite Kante wählen und folgt endlich eine Gerade mit der Fortschreitungsrichtung:

$$(12.)\qquad dx:dy:dy' = \left\| \begin{matrix} y'_0 & -1 & 0 \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & \overline{F}_{33} \end{matrix} \right\|$$

als dritte Kante dieses Polardreiecks.

Beachten wir dann, dass für eine Stelle

$$\overline{F}_1 = 0,\quad \overline{F}_2 = 0,\quad \overline{F}_3 = 0$$

der Ausdruck $\overline{M}$:

$$(13.)\quad \overline{M} = \begin{vmatrix} \overline{F}_{11} + 2y'_0\overline{F}_{12} + y'^2_0\overline{F}_{22} & \overline{F}_{13} + y'_0\overline{F}_{23} \\ \overline{F}_{13} + y'_0\overline{F}_{23} & \overline{F}_{33} \end{vmatrix}$$

wird, so ergiebt sich aus den obenbezeichneten Substitutionen der $dx:dy:dy'$ in die linke Seite der Kegelgleichung:

$$(14.)\quad \left.\begin{matrix} \overline{M}.\,|\overline{F}_{ik}|^{1)}, \\ \overline{F}_{33}, \\ \overline{M}.\ \overline{F}_{33}. \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{Gleiche Vorzeichen:} \\ \text{imaginärer Kegel.} \\ \text{Verschiedene Vorzeichen:} \\ \text{reeller Kegel.} \end{matrix}$$

2. Für die Projection des Kegels auf die (xy)-Ebene ergiebt sich sofort:

Der Umriss des Kegels in der Projectionsrichtung der y'-Axe ist imaginär oder reell, je nachdem

$$(15.)\quad \overline{F}_{33}.\,|\overline{F}_{ik}| \begin{matrix} > 0 \text{ imaginärer Umriss.} \\ < 0 \text{ reeller Umriss.} \end{matrix}$$

3. Die Lage der Raumcurve S gegen den Kegel lässt sich direct aus dem Vorzeichen des Productes der Determinante $|\overline{F}_{ik}|$ in die Determinante bestimmen, welche entsteht, wenn wir $|\overline{F}_{ik}|$ mit den beiden Zeilen der Matrix (10.) (für die Fortschreitungsrichtung der Raumcurve) rändern. Die letztere Determinante reduciert sich auf $\overline{M}.\,|\overline{F}_{ik}|$ und so folgt direct das Vorzeichen von $\overline{M}$ als characteristisch für jene gegenseitige Lage, so zwar, dass für

1) Wo zur Abkürzung die Determinante des Kegels

$$\begin{vmatrix} \overline{F}_{11} & \overline{F}_{12} & \overline{F}_{13} \\ \overline{F}_{21} & \overline{F}_{22} & \overline{F}_{23} \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & \overline{F}_{33} \end{vmatrix} = |\overline{F}_{ik}|$$

gesetzt ist.

(16.) $M \begin{array}{l} > 0 \text{ die Raumcurve } S \text{ den „elliptischen"} \\ < 0 \text{ die Raumcurve } S \text{ den „hyperbolischen"} \end{array}$

Raumteil des Kegels durchsetzt.

4. Endlich lässt sich auch die Richtung des Uebergangs der Flächen $F - k = 0$ in den Knotenpunkten fixieren. Wir machen dabei von der Eingangs schon erwähnten Normierung der Flächen $F - k = 0$ Gebrauch und fixieren das Vorzeichen von F so, dass F für unendlich grosse Werte von x, y, y' positiv wird. Durchlaufen wir dann das System $F - k = 0$ mit wachsendem Parameter k, so ändern sich die Flächen $F - k = 0$ einander je umschliessend so, dass stets der „Innenraum" $F - k = 0$ wächst. Damit wird das Vorzeichen der Determinante $|\overline{F}_{ik}|$ bestimmend für die Richtung des Ueberganges unserer Flächen in der Umgebung eines Knotenpunktes, so zwar, dass:

(17ᵃ.) $$|\overline{F}_{ik}| > 0$$

den Uebergang vom $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipsoid zur imaginären Fläche,} \\ \text{zweischaligen Hyperboloid zum einschaligen Hyperboloid,} \end{array} \right.$

(17ᵇ.) $$|\overline{F}_{ik}| < 0$$

den umgekehrten Uebergang (den wir hier wie auch in der Folge der Kürze wegen durch die Näherungsflächen bezeichnet haben) characterisirt.

§ 8.

C) Fortsetzung. Gestaltliche Discussion. Zusammenstellung.

Der gestaltliche Verlauf der Integralcurven in der Umgebung der im Vorstehenden unterschiedenen singulären Stellen folgt nun in übersichtlichster Weise aus folgenden Ueberlegungen:

Die in **3.** gegebene Unterscheidung der Lage der Raumcurve S gegen den Kegel durch das Vorzeichen von $\overline{M}$ fixiert gleichzeitig die Kategorie der im Knotenpunkte zusammenrückenden Singularitäten:

Im Falle a), in welchem der Kegel imaginär, das den Knotenpunkt umgebende und von S durchsetzte Gebiet „elliptisch“ ist, und ebenso im Falle b) in welchem die Raumcurve S den „elliptischen“ Raumteil des reellen Kegels durchsetzt, fallen, wenn wir den Uebergang mit der elliptisch gekrümmten Fläche beginnen, im Knotenpunkt zwei singuläre Stellen I. Art zusammen, um dann zu verschwinden.

In den Fällen c) und d), in welchen S den „hyperbolischen“ Raumteil des (reellen) Kegels durchsetzt, entstehen, wenn wir wieder den Uebergang mit der elliptisch gekrümmten Fläche beginnen, im Knotenpunkt zwei zunächst vereinigte singuläre Stellen II. Art, die sich dann auf der hyperbolisch gekrümmten Fläche trennen.

Das Verhalten des Integralsystems für die Fläche mit Knotenpunkt sei nun zunächst noch dadurch genauer präcisirt, dass wir diejenigen Curvenzweige, welche durch den singulären Punkt hindurchlaufen, direct nach der Methode von Briot und Bouquet bestimmen. In erster Annäherung lautet hier die Differentialgleichung:

$$(18.)\quad (\overline{F}_{11}+2y'_0\overline{F}_{12}+y'^2_0\overline{F}_{22})\,\xi^2+2\,(\overline{F}_{13}+y'_0\overline{F}_{23})\,\xi\eta'+\overline{F}_{33}\,\eta'^2=0$$

und deren Integral

$$(19.)\qquad \eta=\xi^2.\,\frac{-(\overline{F}_{13}+y'_0\overline{F}_{23})\pm\sqrt{-\overline{M}}}{2\,\overline{F}_{33}}$$

es ergeben sich also zwei Parabeln als Näherungscurven an

die beiden durch den singulären Punkt laufenden Zweige des Integralsystems. Diese sind imaginär für $M > 0$, also in den Fällen a) und b), reell für $M < 0$, also in den Fällen c) und d). In den letzten beiden Fällen unterscheidet noch das Vorzeichen:

$$(20.) \qquad (\overline{F}_{11} + 2y'_0\overline{F}_{12} + y'^2_0\overline{F}_{22}) \cdot \overline{F}_{33} \begin{matrix} > 0 \\ < 0, \end{matrix}$$

ob die beiden sich im singulären Punkte berührenden Curvenzweige auf $\left\{\begin{matrix}\text{einer Seite} \\ \text{beiden Seiten}\end{matrix}\right.$ ihrer gemeinsamen Tangente verlaufen, ein Umstand, den wir sogleich noch weiter berücksichtigen.

Das Verhalten des Integralsystems für die der Fläche mit Knotenpunkt vorausgehenden und für die nachfolgenden Flächen ist durch die Fixierung der Art der auf ihnen liegenden singulären Stellen (I. bez. II. Art) nunmehr für die Umgebung dieser Stellen nach den in Abh. I. gegebenen Ausführungen näher zu bestimmen. Es mag dabei noch für die genauere gestaltliche Characterisierung die Curve der Wendepunkte der Integralcurven:

$$F - k = 0, \quad F_1 + y' F_2 = 0$$

in ihrer Umformung bei dem Uebergang durch die Fläche mit Knotenpunkt untersucht werden.

Bezeichne

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

die Parameter der Fläche mit Doppelpunkt, und deren vorausgehender sowie nachfolgender (ε positiv), so kann die obige Curve in erster Annäherung ersetzt werden durch eine Curve zweiter Ordnung, die durch den Schnitt der ersten Näherungsflächen entsteht. Das ist einmal die Fläche zweiten Grades:

$$\left.\begin{matrix} +2\varepsilon \\ 0 \\ -2\varepsilon \end{matrix}\right\} = \overline{F}_{11}(x-x_0) + 2\overline{F}_{12}(x-x_0)(y-y_0) + \overline{F}_{22}(y-y_0)^2 + 2\overline{F}_{13}(x-x_0)(y'-y'_0) + \dots$$

und dann die Tangentialebene:

$$(\overline{F}_{11} + y'_0 F_{21})(x - x_0) + (\overline{F}_{12} + y'_0 \overline{F}_{22})(y - y_0) + (\overline{F}_{13} + y'_0 \overline{F}_{23})(y' - y'_0) = 0.$$

Für die Fläche mit Knotenpunkt hat daher die Curve der Wendepunkte einen Doppelpunkt, der sich beim Uebergang von $-\varepsilon$ nach $+\varepsilon$ in der bekannten Weise auflöst. Der Doppelpunkt ist $\left\{\begin{matrix}\text{isolirt bez.}\\ \text{nichtisolirt,}\end{matrix}\right.$ je nachdem

$$(21.)\qquad (\overline{F}_{11} + 2y'_0 \overline{F}_{12} + y'^2_0 \overline{F}_{22}) \cdot |\overline{F}_{ik}| \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

ist. Nun beachte man, dass im Falle

$$\overline{M} > 0$$

$$\overline{F}_{33} \text{ und } (\overline{F}_{11} + 2y'_0 \overline{F}_{12} + y'^2 \overline{F}_{22})$$

notwendig gleiches Vorzeichen besitzen, die obige Unterscheidung also direct die Trennung der Fälle $\left\{\begin{matrix}\text{a)}\\ \text{b)}\end{matrix}\right.$ bezeichnet; so kommt hier:

Im Falle a) ist der Doppelpunkt der Wendepunktscurve stets isolirt; im Falle b) existiren stets zwei reelle Zweige der Wendepunktscurve durch den singulären Punkt, die sich dann beim Uebergang auf die Gleichungen mit $-\varepsilon$ bez. $+\varepsilon$ als Parameter je in zwei hyperbolische Aeste auflösen.

In den Fällen c) und d) dagegen haben wir nach der einen oder andern Form der Wendepunktscurve je zwei Unterfälle zu unterscheiden. Nun übersieht man aber leicht (vergl. die nachfolgende Vorzeichentabelle), dass der eben betrachtete Ausdruck

$$(21.)\qquad (\overline{F}_{11} + 2y'_0\overline{F}_{12} + y'^2_0\overline{F}_{22})\cdot|F_{ik}|$$

und der oben für den Unterschied der gegenseitigen Lage der durch den singulären Punkt verlaufenden Curvenzweige abgeleitete

$$(20.)\qquad (\overline{F}_{11} + 2y'_0 + y'^2_0\overline{F}_{22})\cdot\overline{F}_{33}$$

$\left.\begin{matrix}\text{gleiches}\\ \text{ungleiches}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen haben im Falle $\left\{\begin{matrix}c)\\ d)\end{matrix}\right.$; es ergiebt sich daher: Liegen für einen Punkt c) die beiden durch den Knotenpunkt verlaufenden Curvenzweige auf $\left\{\begin{matrix}\text{einer}\\ \text{beiden}\end{matrix}\right.$ Seiten ihrer gemeinschaftlichen Tangente, so hat die Wendepunktscurve dort einen $\left\{\begin{matrix}\text{isolirten}\\ \text{nichtisolirten}\end{matrix}\right.$ Doppelpunkt; für einen Punkt d) dagegen hat man einen $\left\{\begin{matrix}\text{nichtisolirten}\\ \text{isolirten}\end{matrix}\right.$ Doppelpunkt der Wendepunktscurve, je nachdem die durch den Knotenpunkt verlaufenden Curvenzweige auf $\left\{\begin{matrix}\text{einer}\\ \text{beiden}\end{matrix}\right.$ Seiten ihrer Tangente liegen.

In den Tafeln V, VI, VII sind die vier Fälle a), b), c), d) und zugleich jedesmal die beiden benachbarten Formen schematisch dargestellt. Die Fälle c) und d) beziehen sich dabei auf den Fall des isolirten Doppelpunkts der Wendepunktscurve, wo dann nach der einen Richtung des Uebergangs ein kleines Oval als Wendepunktscurve auftritt, während in der andern Richtung des Uebergangs keine reellen Wendepunkte mehr in der Umgebung der singulären Stelle vorhanden sind.

Die nachfolgende Tabelle gibt gleichzeitig die zusammenfassende Uebersicht über die Vorzeichencombinationen jener drei Ausdrücke

$$\overline{M},\quad \overline{F}_{33}\cdot\ |F_{ik}|,\quad |\overline{F}_{ik}|,$$

die nach den vorstehenden Entwickelungen für die Unterscheidung der vier Fälle und der Richtung des Uebergangs in denselben dienen:

Tabelle
für die Art der Singularitäten in den Knotenpunkten
$\bar{F}_1 = 0 \ \bar{F}_2 = 0 \ \bar{F}_3 = 0.$

	M	$\bar{F}_{33} \cdot \lvert \bar{F}_{ik} \rvert$	$\lvert \bar{F}_{ik} \rvert$			
a)	+	+	+	Verschwinden	von zwei	(Taf. IV
	+	+	−	Entstehen	wesentlich	Fig. a)
b)	+	−	+	Verschwinden	singulären Punkten	(Taf. IV
	+	−	−	Entstehen	I. Art.	Fig. b)
c)	−	+	+	Entstehen	von zwei	(Taf. V
	−	+	−	Verschwinden	wesentlich	Fig. c)
d)	−	−	+	Entstehen	singulären Punkten	(Taf. VI
	−	−	−	Verschwinden	II. Art.	Fig. d)

§ 9.

D) Die Bedingung $\bar{F}_{33} = 0$.

Wie in § 2 erwähnt, besagt das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$F_3 = 0, \quad F_{33} = 0$$

für die Flächen

$$F - k = 0,$$

dass der Umriss derselben in seiner Projection auf die $x\,y$-Ebene eine Spitze besitzt. Die Ordinate y' schneidet die Fläche $F - k = 0$ in drei aufeinanderfolgenden Punkten und die in der Umgebung dieser Stellen liegenden reellen Wert-

systeme von y' überdecken die durch die Umrisscurve geteilte Projectionsebene $x\,y$ drei- bez. einfach in der etwa in Fig. 7^b schematisch angedeuteten Form (vergl. auch Abh. I.).

Wird nun, was für einen Wert k_0 des Parameter eintreten möge, gleichzeitig die Gleichung

$$F_1 + y' F_2 = 0$$

erfüllt, so tritt in diesen Punkt (der im Allgemeinen ein ausserwesentlich singulärer für das Integralsystem ist, wie ihn Tafel IV Fig. IV der Abh. I. kennzeichnet) noch ein wesentlich singulärer Punkt herein. Und zwar findet der Uebergang, wenn wir die benachbarten Gleichungen für

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

betrachten, in der Weise statt, dass der betreffende wesentlich singuläre Punkt von dem einen Zweig der Spitzencurve auf den anderen Zweig rückt.

Für $F_{33} = 0$ wird nun

$$(22.) \quad \overline{M} = -(\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})^2 - \overline{F}_2\,(\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})$$

und

$$\overline{N} = 4\,\overline{M} - \overline{F}_2^{\,2} = -(2\,(\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23}) + \overline{F}_2)^2 \cdot < 0;$$

der wesentlich singuläre Punkt ist also jedenfalls III^{ter} oder II^{ter} Art, je nach dem positiven oder negativen Vorzeichen von $\overline{M}$.

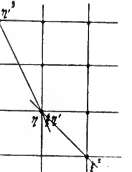


Fig. 6.

Für die durch den singulären Punkt laufenden Zweige der Integralcurven ergeben sich in erster Näherung aus dem nebenstehenden Schema die folgenden beiden Differentialgleichungen:

(23ª.) $\overline{F}_2\,\eta + (\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})\,\xi\,\eta' + \frac{1}{6}\,\overline{F}_{333}\,\eta'^3 = 0$

und

(23ᵇ.) $\overline{F}_2\,\eta + \frac{1}{2}\,(\overline{F}_{11} + 2\,y'_0\,\overline{F}_{12} + y'^2\,\overline{F}_{22})\,\xi^2$
$+ (\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})\,\xi\,\eta' = 0$

Bestimmt man nun nach dem von **Briot** und **Bouquet** gegebenen Verfahren mit Hülfe dieser Gleichungen die durch den singulären Punkt verlaufenden Curvenzweige, so ergeben sich zunächst aus (23ª.) die zwei Zweige:

(24ª.) $$\eta = \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{-2\,\frac{2\,\overline{F}_2 + 3\,(\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})}{\overline{F}_{233}}\,\xi^3} + \ldots$$

und aus (23ᵇ.) der weitere:

(24ᵇ.) $$\eta = \frac{-(\overline{F}_{11} + 2\,y'_0\,\overline{F}_{12} + y'^2_0\,\overline{F}_{22})}{4\,(\overline{F}_2 + \overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})}\,\xi^2 + \ldots$$

Es ist nun vor Allem zu entscheiden, welche Lage diese Curvenzweige zur Umrisscurve, und damit auf den drei im singulären Punkt zusammenhängenden Blättern der Fläche $F - k_0 = 0$ einnehmen.

Die Umrisscurve

$$F - k_0 = 0, \quad F_3 = 0$$

lässt sich für die Umgebung der singulären Stelle näherungsweise ersetzen durch

(25ª.) $\overline{F}_{332}\,\overline{F}_2 \cdot \eta^2 + \frac{8}{9}\,(\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})\,\xi^3 = 0.$

Um die drei Blätter der Fläche $F - k_0 = 0$, die (Fig. 7) in der $(\xi\,\eta)$-Ebene übereinander liegen, zu trennen, genügt es, die Abbildung auf die $(\xi\,\eta')$-Ebene zu machen. Dort erscheint in erster Annäherung die Umrisscurve als Parabel, gegeben durch:

(25ᵇ.) $\frac{1}{2}\,\overline{F}_{333}\,\eta'^2 + (\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})\,\xi = 0$

und ist die Beziehung der beiden Projectionen auf einander durch die nebenstehende Figur gegeben:

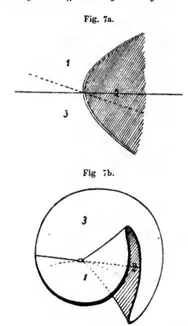


Fig. 7a.

Fig. 7b.

Für die Abbildung der oben in erster Näherung gegebenen durch den singulären Punkt laufenden Curvenzweige erhält man nun einmal die Parabel

$$(26^a.)\quad \tfrac{1}{2}\overline{F}_{333}\,\eta'^2 + (2\,\overline{F}_2 + 3\,(\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23}))\,\xi = 0$$

und weiter die Gerade

$$(26^b.)\quad (\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})(\overline{F}_2 + 2\,(\overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23}))\,\eta' + (\overline{F}_{11} + 2\,y'_0\,\overline{F}_{12} + y'^2_0\,\overline{F}_{22})\cdot(\overline{F}_2 + \overline{F}_{13} + y'_0\,\overline{F}_{23})\,\xi = 0.$$

Die letztere Gerade läuft entweder durch die Teile 1 und 2 oder durch 3 und 2 der Ebene $(\xi\,\eta')$ und dem entsprechend berührt der parabolische Zug (24^b) in der Ebene $(\xi\,\eta)$ die Axe ξ im einen oder anderen Gebiet.

Für die Parabel $(26^a.)$ haben wir zwei Fälle zu trennen, je nachdem dieselbe in den Gebieten 1 und 3 oder im Gebiete 2 verläuft. Ein Vergleich der Formeln (25^b) und (26^b),

in denen wir zur Kürze (durch Vorzeichenwahl in F) $\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23}$ als positive Grösse voraussetzen wollen, liefert:

Haben $(\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23})$ und $2\bar{F}_2+3(\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23})$ verschiedenes Vorzeichen, ist also $2\bar{F}_2+3(\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23})$ negativ, so folgt, dass auch $\bar{F}_2+\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23}$ negativ ist und damit

$$\bar{M}=-(\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23})(\bar{F}_2+\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23})>0.$$

Haben die obigen Ausdrücke gleiches (positives) Vorzeichen und ist:

$$2\bar{F}_2+3(\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23})<\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23},$$

so ist $(\bar{F}_2+\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23})$ negativ und damit wieder

$$\bar{M}>0;$$

ist dagegen

$$2\bar{F}_2+3(\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23})>\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23},$$

so ist $(\bar{F}_2+\bar{F}_{13}+y'_0\bar{F}_{23})$ positiv und daher

$$\bar{M}<0.$$

Also ergiebt sich:

Ist der in die Spitze der Umrisscurve fallende wesentlich singuläre Punkt von der III[ten] Art, so ist die Lage der Umrisscurve U zu den Zweigen der Integralcurve durch die beiden Schemata:

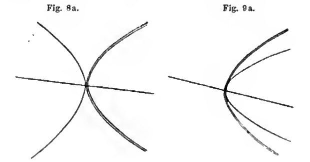


Fig. 8a. Fig. 9a.

gegeben, denen auf die $(\xi\eta)$-Ebene projicirt, die Bilder

Fig. 8b.

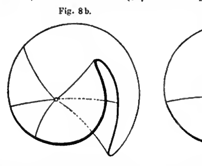
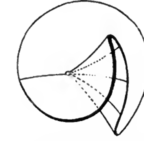
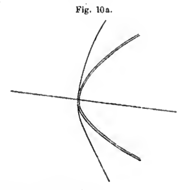


Fig. 9b.



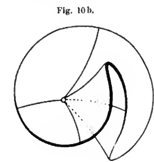
entsprechen, ist dagegen der wesentlich singuläre Punkt II[ter] Art, so ist diese Lage schematisch gegeben durch

Fig. 10a.



und das entsprechende Bild

Fig. 10b.



Nun ist es nicht schwer, den Verlauf des ganzen Curvensystems in der Umgebung der singulären Stelle einzutragen, wenn wir beachten, dass der Character der singulären Stelle in der Projection auf die Ebene ($\xi\,\eta'$) dem Typus III' bez. II' der Abh. I. entspricht, wobei die eine der beiden ausgezeichneten Geraden, welche in dem dort dargestellten Falle die singuläre Stelle durchsetzen, durch die obige Parabel (26^a) zu ersetzen ist, die andere (in erster Näherung) durch die Gerade (26^b).

II. Abschnitt.

Die ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen $F(x, y, y') - k = 0$.

§ 10.

Uebersicht.

Die Stelle x_0, y_0, y'_0 einer Differentialgleichung $F - k_0 = 0$ ist ausserwesentlich singulär, wenn

$$(27.)\qquad \overline{F}_3 = 0, \quad \overline{F}_{33} = 0;$$

dann ist das Verhalten des Integralsystems in der Umgebung einer solchen Stelle (wie schon erwähnt) im Allgemeinen durch die in § 3 und auf Tafel IV Fig. IV der Abh. I. gegebenen Entwickelungen gekennzeichnet.

Neben dem soeben besprochenen Zusammenrücken einer wesentlich und einer ausserwesentlich singulären Stelle haben wir jetzt noch das Zusammenfallen zweier ausserwesentlich singulären Stellen zu betrachten.

Deuten wir die Gleichungen

$$F_3 = 0, \quad F_{33} = 0$$

im Raume (x, y, y') wieder als die Gleichungen einer Raumcurve V, des Ortes der Spitzen der Umrisscurven, so wird ein Zusammenfallen zweier solcher Spitzen eintreten für die Berührungsstellen der Curve V mit einer der Flächen $F - k = 0$. Dies liefert sofort die Bedingungsgleichung:

$$(28.)\qquad \begin{vmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 & 0 \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} & 0 \\ \bar{F}_{331} & \bar{F}_{332} & \bar{F}_{333} \end{vmatrix} = 0.$$

Man hat also zwei wesentlich verschiedene Fälle dieses Zusammenrückens zu unterscheiden, je nachdem zu den Bedingungsgleichungen:

$$\bar{F}_3 = 0, \quad \bar{F}_{33} = 0$$

noch hinzutritt:

E) $$\bar{F}_{333} = 0 \qquad (\S\ 11),$$

beziehungsweise

F) $$\begin{vmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\S\ 12).$$

§ 11.

E) Die Bedingung $\bar{F}_{333} = 0$.

Dieser Fall gestaltet sich ganz analog dem schon in Abh. I. § 3 behandelten allgemeinen:

$$\bar{F}_3 = 0 \quad \bar{F}_{33} = 0.$$

Hier ergiebt sich sofort in erster Näherung die Differentialgleichung:

$$(29.)\qquad (\bar{F}_1 + y'_0 \bar{F}_2)\xi + \tfrac{1}{24}\bar{F}_{3333}\,\eta'^4 = 0,$$

in welcher als nächste Näherungsglieder noch zutreten:

$$(30.)\qquad \overline{F}_2\,\eta + (\overline{F}_{13} + y'_0\overline{F}_{23})\,\xi\,\eta' + \tfrac{1}{120}\,\overline{F}_{33333}\,\eta'^5$$

Die durch den singulären Punkt hindurchlaufende Curve ist in erster Näherung gegeben durch:

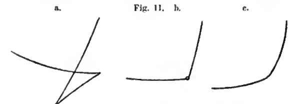
$$(31.)\qquad (\overline{F}_1 + y'_0\,\overline{F}_2)\,\xi^5 + \tfrac{1}{24}\,\overline{F}_{3333}\,(\tfrac{5}{4}\,\eta)^4 = 0.$$

Für die Umrisscurve U ergiebt sich (mit Berücksichtigung der Glieder zweiter Näherung):

$$(32.)\qquad \tfrac{1}{32}(\overline{F}_{13} + y'_0\overline{F}_{23})^4\,\xi^4 - \tfrac{1}{27}\overline{F}_{3333}((\overline{F}_1 + y'_0\overline{F}_2)\xi + \overline{F}_2\eta)^3 = 0.$$

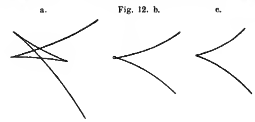
Eine gestaltliche Discussion der Umgebung der singulären Stelle zeigt nun einmal: Die Umrisscurve deformiert sich bei ändernder Constanten k derart, dass zwei Spitzen in der bekannten durch die Figuren 11a, b, c gekennzeich-

a. Fig. 11. b. c.



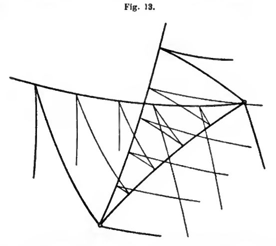
neten Weise zusammenrücken, um dann imaginär zu werden. Der Verfolg des Zusammenhangs der einzelnen Blätter der Flächen $F - k = 0$ bei diesem Uebergang ergiebt dann einen ähnlichen Uebergang der Curven des Integralsystems, bei welchem drei Spitzen (die sich auf die drei Zweige der Umrisscurve (Fig. 11[a]) verteilen) zusammenrücken, wobei nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle die Integralcurven

a. Fig. 12. b. c.



nur eine einzige Spitze aufweisen. Die Fig. 12a, b, c zeigt diesen Uebergang, während Fig. 13 den Gesammtverlauf der

Fig. 13.



Curven des Integralsystems in einer penultimaten Form zusammenstellt.

Es ist leicht nachzuweisen, dass ein analoger gestaltlicher Uebergang die Singularität kennzeichnet, welche eintritt, wenn an einer Stelle x_0, y_0, y'_0 alle Ableitungen von F nach y' bis hin zur n^{ten} verschwinden.

§ 12.

F) Die Bedingung $\overline{F}_1 \overline{F}_{32} - \overline{F}_2 \overline{F}_{31} = 0$.

Tritt zu den Gleichungen

$$\overline{F}_3 = 0, \quad \overline{F}_{33} = 0$$

noch die obige Bedingungsgleichung hinzu, so ist für den Verlauf der durch den singulären Punkt gehenden Integralcurve die schon in Abh. I. § 3 discutirte Gleichung

$$(33.) \qquad (\overline{F}_1 + y'_0 \overline{F}_2)\xi + \tfrac{1}{6} \overline{F}_{333} \eta'^3 = 0$$

maassgebend, welcher die Curve

$$(34.) \qquad (\overline{F}_1 + y'_0 \overline{F}_2)\, \xi^3 + \tfrac{1}{6} \overline{F}_{333} (\tfrac{3}{2}\, \eta)^2 = 0$$

entspricht; die Art der Auflösung dieser Singularität aber für die benachbarten Integralcurven wird eine andere, als die dort für den allgemeinen Fall (in Fig. IV) gegebene.

Wir betrachten zur genaueren Discussion im Raume x_0, y_0, y'_0 wieder drei aufeinander folgende Flächen $F - k = 0$, den Parametern

$$k_0 - \varepsilon, \quad k_0, \quad k_0 + \varepsilon$$

entsprechend. Hier bezeichne $\overset{\circ}{U}$ den Umriss der Fläche $F - k_0$ in Richtung der y'-Axe:

$$(35.) \qquad \overset{\circ}{U} \begin{cases} F - k_0 = 0, \\ F_3 \quad\;\; = 0; \end{cases}$$

und analog $\overset{-\varepsilon}{U}$, $\overset{+\varepsilon}{U}$ die Umrisscurven für die beiden Nachbarflächen; ferner sei V der Ort derjenigen Punkte aller Umrisscurven U der Flächen $F - k = 0$ (in Richtung der y'-Axe), für welche die Tangente auf der xy-Ebene senkrecht steht:

$$(36.) \qquad V \begin{cases} F_3 \;\, = 0, \\ F_{33} = 0. \end{cases}$$

Endlich sei W der Ort der Punkte aller dieser Umrisscurven, für welche die Schmiegungsebene auf der xy-Ebene senkrecht steht:

$$(37.) \qquad W \begin{cases} F_3 = 0, \\ H \;= 0, \end{cases}$$

wo H die Hesse'sche Form von F bezeichnet.

Betrachtet man die Projection aller Umrisscurven in die (xy)-Ebene, so entspricht V dem Ort der Spitzen, W dem Ort der Wendepunkte dieser Projectionen.

Nun zeigt eine Entwicklung der Gleichungen für U, V, W in der Umgebung unseres singulären Punktes:

1. Die Bedingung $\overline{F}_1 \overline{F}_{32} - \overline{F}_2 \overline{F}_{31} = 0$ besagt, dass die Flächen $F - k_0 = 0$ und $F_3 = 0$ sich berühren, dass also die Umrisscurve $\overset{\circ}{U}$ in x_0, y_0, y'_0 einen Doppelpunkt besitzt; wir haben also zwei Fälle zu trennen:

$$(38.)\quad \begin{vmatrix} \overline{F}_{11} - \lambda \overline{F}_{311} & \overline{F}_{12} - \lambda \overline{F}_{312} & -\lambda \overline{F}_{313} & \overline{F}_{13} \\ \overline{F}_{21} - \lambda \overline{F}_{321} & \overline{F}_{22} - \lambda \overline{F}_{322} & -\lambda \overline{F}_{323} & \overline{F}_{23} \\ -\lambda \overline{F}_{331} & -\lambda \overline{F}_{332} & -\lambda \overline{F}_{333} & 0 \\ \overline{F}_{31} & \overline{F}_{32} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} < 0 \text{ isolirter Doppelpunkt.} \\ \\ > 0 \text{ Doppelpunkt mit reellen Tangenten.} \end{matrix}$$

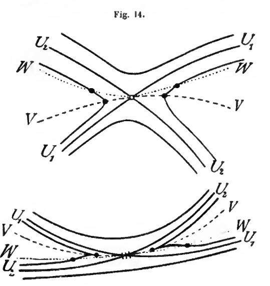
(wobei $\overline{F}_1 - \lambda \overline{F}_{31} = 0$, $\overline{F}_2 - \lambda \overline{F}_{32} = 0$).

Im zweiten Falle verlaufen die beiden reellen Aeste der Umrisscurve, die sich im Doppelpunkte durchsetzen, der Art, dass in den wirklichen Doppelpunkt noch ein scheinbarer Doppelpunkt der Umrisscurve gerückt ist. In der Projection auf die xy-Ebene spricht sich dies, wie eine kurze Rechnung zeigt, dadurch aus, dass hier die beiden Zweige U_1, U_2 der Umrisscurve $\overset{\circ}{U}$ eine dreipunktige Berührung mit einander eingehen. (Vergl. die umstehende Fig. 14.)

2. Die Curven V und W durchsetzen den singulären Punkt und zwar mit gemeinsamer Tangente; die Projectionen auf die xy-Ebene dieser beiden Curven berühren sich also vierpunktig. In dem in der untenstehenden Fig. 14 dargestellten Falle des „Doppelpunkts mit reellen Tangenten" sind dabei die Tangentenrichtung der Curven V, W und die Richtung der y'-Axe getrennt durch die beiden Tangenten der Curve $\overset{\circ}{U}$.

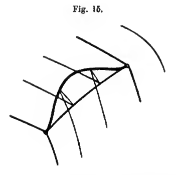
Betrachtet man jetzt den Grenzübergang für die den Parametern $k_0 - \varepsilon$, k_0, $k_0 + \varepsilon$ entsprechenden Flächen, so

Fig. 14.

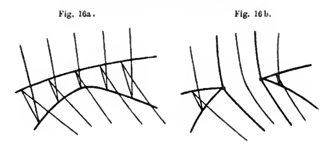


ergiebt sich das Zusammenrücken zweier Spitzen der Umrisscurve zugleich mit dem Zusammenfallen zweier Wendepunkte derselben in der Weise, wie es Fig. 15 für den isolirten

Fig. 15.



Doppelpunkt von $\overset{0}{U}$ in einer ersten penultimaten Form, Fig. 16a und b für den nichtisolirten Doppelpunkt in den den Parametern $k_0 - \varepsilon$ wie $k_0 + \varepsilon$ entsprechenden Formen darstellt.



In gleicher Weise findet sich auch der Verlauf der Curven des Integralsystems mit dem bekannten Spitzenpaar eingetragen.

Ueberblicken wir das Ergebniss der vorliegenden Untersuchung über Auftreten, Umformung und Verschwinden der singulären Stellen in dem System der Differentialgleichungen

$$F(x, y, y') - k = 0$$

und beachten dabei, welchen Einfluss diese Aenderungen in den singulären Stellen auf die in Abh. I. § 4 erörterten Abzählungen haben, so findet sich, wie notwendig:

Der Gleichung

$$K = s_0 + s_\infty - s_2,$$

welche die Beziehung der Characteristik (Zusammenhangszahl) einer Fläche $F - k = 0$ zu den Anzahlen s_0, s_∞, s_2 der singulären Stellen I^ter^, III^ter^ und II^ter^ Art für das zugehörige System der Integralcurven angiebt, entspricht das Verhalten der Singularitäten beim Durchgang durch die Knotenpunkte des Flächensystems. Hier ändert sich die Characteristik um ± 2, und dementsprechend ändert sich auch (in der durch die Fälle **C** a, b, c, d unterschiedenen Weise) die Anzahl

der wesentlich singulären Stellen durch Auftreten (bez. Verschwinden) von jedesmal zwei Punkten I[ter] oder II[ter] Art.

Die Aenderungen im Flächensystem, welche keine Aenderung in der Characteristik hervorrufen, lassen auch die obige Formel unverändert:

Es entstehen (bez. verschwinden) im Falle **A** stets paarweise je ein Punkt P_∞ und ein Punkt P_2, die sich bei der Abzählung compensieren. Im Falle **B** verwandelt sich ein Punkt P_∞ in einen (für die Abzählung aequivalenten) Punkt P_0 oder umgekehrt. Im Falle **D** findet nur eine Verschiebung eines wesentlich singulären Punktes von einem Blatte der Fläche auf ein anderes statt, durch welche sich der Verlauf der Integralcurven in den aus den einzelnen Blättern bestehenden Teilgebieten entsprechend ändert, der Gesammtverlauf aber nicht. Die Fälle **E** und **F** bringen ebenso nur Aenderungen hervor, die sich auf die einzelnen Teilgebiete beziehen, innerhalb welcher sich (Abh. I. pag. 47) analoge Relationen wie für die Gesammtfläche aufstellen lassen.

In jedem Falle sind es ganz bestimmt gestaltlich zu bezeichnende Uebergangsformen, welche durch die successiven Aenderungen, die ein System von Integralcurven bei unserem Deformationsprocesse erleidet, hervorgerufen werden; sie ergeben, damit mag die Absicht der vorstehenden Untersuchung zusammengefasst sein, innerhalb der schon Eingangs bezeichneten Grenzen einen weiteren Aufschluss über den Gesammtverlauf solcher Curvensysteme.

Geologische Bemerkungen
über die
warme Quelle des Brennerbades
und ihre Umgebung.

Von W. v. Gümbel.

(Eingelaufen 5. März.)

Zu der hohen Bedeutung, welche der Brenner-Pass als leicht zugängliche, bequeme und daher auch am meisten benützte Verbindungs- und Verkehrsstrasse der Gebiete nördlich und südlich der Alpen seit den ältesten Zeiten besitzt und zu dem grossen Interesse, welches derselbe als niedrigste, quer verlaufende Einsattelung im ganzen Zug des Centralstockes der Alpen bezüglich der Erklärung seiner Entstehung der wissenschaftlichen Forschung bietet, gesellt sich noch als besonders auffallende Erscheinung das Auftreten der warmen Quelle des Brennerbades, welche nahe auf dem höchsten Scheitelpunkte der Passvertiefung zum Vorschein kommt.

Derartige Thermen gehören gerade nicht zu den häufigen Erscheinungen in den Alpen und es liegt desshalb die Frage umso näher, welchen besonderen geologischen Verhältnissen das Vorkommen einer solchen warmen Quelle auf diesem Höhenpunkte unseres Hochgebirges ihren Ursprung

zu verdanken habe. Diese Untersuchung gewinnt dadurch an Wichtigkeit, dass es in den einzelnen Theilen der Alpen, in welchen Thermen vorkommen, durchaus an jüngeren vulkanischen Eruptivgesteinen fehlt, an deren Auftreten sonst das Erscheinen heisser Quellen geknüpft zu sein pflegt. Selbst ältere Aufbruchsgesteine, wie Porphyr, Melaphyr und Augitophyr, welche in besonders grossartiger Verbreitung in den Südalpen, namentlich bei Botzen und im Fassathale, auftauchen, müssen wegen ihrer grossen Entfernung von dem Ursprungspunkte der Thermen in Bezug auf die Entstehung derartiger warmen Quellen als völlig einflusslos angesehen werden. Vermissen wir doch gerade in dem Hauptgebiete dieser älteren Eruptivgesteine solche Thermen vollständig! Es müssen desshalb diesem aussergewöhnlichen Auftreten ganz andere Ursachen zu Grunde liegen, denen näher nachzuforschen hier unsere Aufgabe sein soll.

Ich habe in den letzten Jahren Gelegenheit gefunden, der geologisch so bedeutsamen Erscheinung von Mineralwasser- und warmen Quellen meine Aufmerksamkeit zuzuwenden und nachdem ich die näheren Verhältnisse in den Thermen von Ems[1]) und Karlsbad[2]) kennen gelernt hatte, meine Untersuchungen auch auf das alpine Gebiet, auf die warmen Quellen von Gastein[3]) und Bormio[4]) auszudehnen. Es war mir bei diesen Studien ein wahres Bedürfniss, nunmehr auch den näheren Verhältnissen nachzuforschen, unter welchen die warme Quelle vom Brennerbad zu Tage tritt, nachdem meine vielfachen Ausflüge nach den süd-

1) Geol. Fragm. aus der Umgegend von Ems in den Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. 1882, S. 198.

2) Geol. Aphorism. über Karlsbad im Fremdenblatt v. Karlsbad IV. v. 12. Juli 1884.

3) Geol. Bemerkungen über die Thermen von Gastein in den Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. 1889, S. 341.

4) Geol. Bemerkungen über die Thermen von Bormio und das Ortlergebirge daselbst 1891, S. 79.

lichen Alpen mich so oft über den Brenner geführt hatten, ohne daselbst behufs geologischer Untersuchungen Aufenthalt zu nehmen. Ein längeres Verweilen in Gossensass während des letzten Sommers bot mir nun Gelegenheit, das Versäumte nachzuholen. Die nachfolgende Schilderung soll einen, wenn auch kleinen Beitrag zur näheren Kenntniss der geologischen Verhältnisse des Brennerbades und seiner Umgebung liefern.

Die warme Quelle des Brennerbades.

Kreuzjoch. Brennerpass. Wolfendorn.



Strasse von Gossensass. Bad Brenner. Postalpe.

Das Gebirge am Brennerbad.

Die warme Quelle des Brennerbades soll nach einem alten Badbüchlein[1]) schon im 14. Jahrhundert bekannt und

1) Kurtzer Inhalt und Anweisung, wie nemlich das alt-wohlberühmte Kraft- und Tugendwürckende, also genannte Heylbrunner- oder Brenner-Bad in d. f. Gr. Tyrol entspringend etc. solle gebraucht werden. Zum erstenmal gedruckt zu Ynsbrugg durch D.

benützt worden sein; später aber verschüttet ist dieselbe erst wieder durch Zacharias Geitzkofler von und zu Gaillenbach gegen Ende des 16. Jahrhunderts aufgedeckt und zu Badzwecken hergerichtet worden. Es wäre zu verwundern, wenn diese Quelle, so unmittelbar an der ältesten Verkehrstrasse durch die Alpen gelegen, nicht schon im Alterthume die Aufmerksamkeit auf sich gezogen hätte. Doch scheinen hierüber zuverlässige Nachrichten zu fehlen. Jetzt ist dieselbe im Besitz der Stadt Sterzing und wird zum Theil in einer noch recht primitiv eingerichteten Badehütte für die Landleute, bei welchen ihre Heilwirkung in sehr hohem Ansehen steht und ausserdem in einem den Anforderungen der Neuzeit entsprechenden grossen Kurhotel ausgiebig zu Badzwecken benützt.

Die Quelle bricht nur um Weniges tiefer (1330 m) als der Sattelpunkt des Brennerpasses (1362 m) bereits auf der Südabdachung desselben dicht neben der Strasse am Westfusse des zum Wolfendorn und zur Fladspitze ansteigenden Gehänges hervor und ist in einer seichten, brunnenähnlicgen Vertiefung innerhalb des erwähnten Badehauses gefasst. Eine wenig vertiefte schmale Rinne, welche hinter diesem Badhause an dem Gehänge steil aufwärts sich zieht, deutet die Richtung an, in welcher das Wasser herzukommen scheint. Diese Rinne ist unten zum Schutz der Quellenfassung brückenartig überwölbt und auf der Sohle ausgepflastert, sodass zeitweise wenigstens ein Theil des Quellwassers unter diesem Gewölbe zwischen dem Steinpflaster hervordringt. In dem dunklen Quellenraum selbst lässt sich bei künstlicher Beleuchtung wenigstens so viel wahrnehmen, dass das Quellwasser nicht aus der Tiefe emporsprudelt, sondern seitlich vom Berghang her abfliesst. Man bemerkt keine lebhafte Bewegung des

---

Paur, Anno 1603. (Abdruck 1887 zu Sterzing in der Buchdruckerei des A. Mnerinsky.) — Das Brennerbad von Conrad Fischnaler, Innsbruck bei Wagner 1878.

Wassers und kein Aufsteigen von Gasblasen, ebensowenig irgend einen Geruch nach sich entwickelnden Gasen.

Das Gestein, welches unter dem ziemlich mächtigen Thal- und Gehängeschutt in nächster Nähe der Quelle an dem Berghang aufstreicht, ist ein glimmerreicher, Schwefelkies führender, flasriger Schiefer, begleitet von quarzitischen Lagen, während sonst in der weiteren Umgebung der hier sehr verbreitete kalkige Phyllit mit zwischengelagerten Bänken von körnigem Kalk den Untergrund bildet und die benachbarten Berge zusammensetzt. Die Schichten streichen, abgesehen von kleinen Falten und Biegungen, weit vorherrschend von SW. nach NO. und fallen ziemlich constant unter 30—40° nach NW. ein; nur in der Nähe der Quelle beobachtet man südöstliches Einfallen.

Das Wasser des Brennerbades gehört zu den an Mineralstoffen armen, lauwarmen Thermen. Seine Temperatur wird allgemein zu 23,1° C., also um nahezu 19° wärmer, als die mittlere Jahrestemperatur des Bodens am Ausflusspunkte (zu 4,2° C.[1]) angenommen). Nach Barth, Senkofer und Kölle[2]) beträgt sie 22,9° C. Ich habe dieselbe wiederholt im August und September 1891 zu 21,6° gemessen, während die Temperatur des oberhalb der im Badehaus gefassten Quelle unter dem erwähnten Gewölbe ausfliessenden Wassers nur 20° C. betrug. Mitte September war dieser obere Ausfluss versiegt, ohne dass dadurch an der Temperatur der Badequelle sich eine Aenderung bemerkbar machte. Ob die Wärme der Badequelle in neuerer Zeit gegen früher abgenommen hat, muss ich unentschieden lassen. Es scheint dies aber der Fall zu sein. Zum Vergleiche wurde die Tem-

1) Die mittlere Jahrestemperatur der Luft auf dem Brennerpass wird zu 3,4° angegeben, während hier die nach der Wärme der gewöhnlichen Quellen bemessene Temperatur des Bodens 4,2° beträgt.

2) Bericht des naturwissensch.-medizin. Vereins in Innsbruck II. 1871. S. 26.

peratur mehrerer benachbarten gewöhnlichen Quellen wiederholt gemessen. Eine Trinkquelle in nächster Nähe des Bades neben der Strasse nach Gossensass an einer verebneten, mit einer Ruhebank versehenen Anlage (1325 m) ergab 4,2°; eine sehr starke Quelle nahe unter der Restauration (nicht Eisenbahnstation) Schellenberg 5,3° C. bei 1305 m Höhe; die Haupttrinkquelle oberhalb Gossensass 6,2° C. bei 1075 m; ebenso die Quelle des Springbrunnens am Redwitzplatze, eine starke Quelle unterhalb Venaders im Obernberger Thale bei 1225 m gleichfalls 6,2° C. Die sämmtlichen Quellen erweisen sich etwas wärmer als die berechnete mittlere Jahrestemperatur der Luft an den entsprechenden Ausflusspunkten. Dies dürfte wohl in der langanhaltenden Bedeckung der Oberfläche mit Schnee, welche das Eindringen grösserer Kälte in den Boden verhindert, seinen Grund haben. Bemerkenswerth ist der Einfluss, welchen das von der Quelle in die vorüberfliessende noch ganz kleine Eisack sich ergiessende Wasser auf die Temperatur der letzteren ausübt. Nahe oberhalb der Einmündung des Badequellenabflusses wurde die Wärme des Eisackwassers zu 9,0° C. gemessen; nach dem Zufluss der Quelle zur Eisack steigt deren Temperatur auf 11,4° C. und behält diesen Wärmegrad, der früh morgens bei nahezu gleich hoher Lufttemperatur in möglichst kurzer Zeit an sehr vielen Stellen bis zur Einmündung des Pflerschbaches bei Gossensass gemessen wurde, trotz der ungeheuren Reibung, mit welcher das Wasser in fast ununterbrochenem Wasserfall-artigem Abfluss 300 m hoch abstürzt, ohne nennenswerthe Erhöhung bei.

Was die Wassermenge der Badequelle anbelangt, so scheint diese sehr veränderlich zu sein, je nachdem bloss im Badehaus oder auch noch oberhalb desselben unter dem erwähnten Gewölbe ein Abfluss stattfindet. Zur Zeit, als letzteres nicht mehr der Fall war (Mitte September 1891), betrug der Quellenerguss ungefähr 40—50 Sekundenliter. Zu

einer genaueren Messung fehlte es an einer entsprechenden Vorrichtung.

In Bezug auf den Gehalt der Quelle an Mineralstoffen liegt eine Analyse (A) von L. Barth, K. Senkofer und R. Kölle[1]) vor. Da die Temperatur gegen früher abgenommen zu haben scheint, war es nicht unwichtig, zu untersuchen, ob auch eine entsprechende Gehaltsverminderung eingetreten ist. Eine erneuerte Analyse, welche Herr Ass. A. Schwager sowohl in Betreff des Mineralwassers (B), als wie eines gewöhnlichen Quellwassers von Gossensass (C) vornahm, ergab folgende Zahlen, denen zum Vergleiche auch die Analysen der verwandten Thermen von Gastein (G) und von Pfäffers-Ragaz (P) beigesetzt sind.

Nachstehende Zahlen lassen die chemische Verwandtschaft der verschiedenen Thermen der Alpen erkennen, welche überhaupt wenig von jenen des Gehaltes der gewöhnlichen, in älteren Gebirgsarten entspringenden Quellen abweichen. Es entspricht dieser Gehalt an Mineralstoffen auch im Allgemeinen der Beschaffenheit der Gesteine in der Nachbarschaft der Quellen. Die geringe Menge von Kalkcarbonat in den Gasteiner Thermen findet eine Erklärung in dem Umstande, dass diese Quellen in einem sehr kalkarmen Gneissgebirge ihren Ursprung haben, während die übrigen Quellen aus mehr oder weniger kalkhaltigen Schichten hervortreten, wie es sich insbesondere bei der Brennerbadquelle nachweisen lässt. Der Gehalt an Eisen[2]) rührt wohl von zersetztem Ankerit her. Der bei dieser Quelle zur Zeit gefundene, gegen früher geringere Gehalt an festen Bestandtheilen scheint mir von

1) Bericht des naturwissenschaftl.-medizin. Vereins in Innsbruck. II. Jahrg. 1871. S. 27.

2) Unterhalb des Bades in der Richtung nach Gossensass zu zeigen sich reichliche Spuren von Eisenguhren, die vielleicht von einer eisenhaltigen Quelle abstammen. Es würde sich empfehlen, der Sache hier näher auf den Grund zu sehen.

1 Liter Wasser enthält	A	B	C	G	P
Kalkcarbonat	0,1756	0,0932	0,1600	0,0195	0,1306
Bittererdecarbonat	0,0447	0,0577	0,0336	0,0017	0,0531
Natriumcarbonat	—	—	—	—	0,0061
Eisencarbonat	0,0035	—	—	0,0005	0,0017
Kalksulphat	0,1585	0,0284	0,1034	—	0,0015
Bittererdesulphat	—	0,0106	—	—	—
Natriumsulphat	0,0144	0,0181	0,0284	0,2085	0,0329
Kaliumsulphat	0,0168	0,0122	—	0,0135	0,0075
Chlornatrium	0,0102	—	0,0069	0,0428	0,0493
Chlorkalium	—	0,0022	0,0067	—	—
Chlormagnesium	0,0060	—	—	—	—
Eisenoyyd	—	0,0003	0,0004	—	—
Thonerde	—	0,0026	0,0045	—	—
Thonerdesilikat	0,0007	—	—	—	—
Thonerdephosphat	0,0003	—	—	0,0007	0,0009
Kieselsäure	0,0090	0,0097	0,0045	0,0496	0,0141
Freie Kohlensäure	—	—	—	0.0309	0,0971
Glühverlust	—	0,0041	0,0324	0,0004	0,0006
Zusammen	0,4396[1]	0,2391[2]	0,3808	0,3681[3]	0,3954[4]

1) Dazu Spuren von Salpetersäure, Ammoniak, Lithium; 0,0118 organ. Substanz im Liter und 46,1 ccm Gas (18,4 N; 7,7 O. u. 20,0 CO_2).

2) Hierbei konnten die nur in geringer Menge vorkommenden Bestandtheile bei der kleinen zur Verfügung stehenden Wassermenge nicht bestimmt werden; Eisenoxyd ist als Carbonat im Quellwasser enthalten, in der Analyse B jedoch als Fe_2O_3 bestimmt; der Gehalt an Kalkcarbonat wegen bereits schon eingetretener Abscheidung in den Flaschen scheint etwas zu gering angegeben.

3) Dazu Cl Li = 0,0027, Mangancarbonat- und Fluorcalcium-Spuren; ferner kleinste Mengen von Caesium, Rubidium, Strontium, Titansäure und Arsen.

4) Dazu Barytcarbonat = 0,00064; Strontiumcarbonat = 0,00152; Chlorlithium = 0,0002; Borsaures Natrium = 0,00038; Jodnatrium = 0,00003; dann Spuren von Bromnatrium, Caesium, Rubidium und Thallium. In der Summe ist die freie und halbgebundene Kohlensäure mit eingerechnet; ohne diese ist die Summe 0,2990.

einer nicht zweckentsprechenden Fassung herzurühren, worauf schon der Umstand hinweist, dass, wie oben bereits erwähnt wurde, zeitweise offenbar zugehörige Wasseradern auch ausserhalb der Quellfassung hervorbrechen.

Der Phyllit in dem Brennergebiete.

Das im Quellengebiet des Brennerbades weit und breit herrschende Gestein ist der in dem Tiroler Centralalpenstock mächtig entwickelte Phyllit mit Uebergängen in Glimmer- und Gneissphyllit und mit Einlagerungen von körnigem Kalk (daher auch die Bezeichnung Kalkphyllit) und in Begleitung von grünen chloritischen und hornblendigen, sowie hellfarbigen quarzitischen Schiefern. Diesem älteren Gebirgsfundament sind in der Nähe des Brenners mächtige Stöcke und Schollen von jüngeren Trias- und Liaskalken aufgesetzt und zum Theil eingefaltet, zunächst im Tribulaunstock und im Kalkzug auf der nördlichen Seite des Pflerschthales. Erst entfernter erscheinen ächte Glimmerschiefer und Centralgneissschichten, welche als noch ältere Gebilde unter und neben dem Phyllit auftauchen, während Eruptivmassen, wie der Granit des Ifingers und der Franzensfeste, der Porphyr von Bozen und der Augitophyr des Fassathales, beträchtlich weit abstehen und sicher ohne jede Beziehung zu der Therme des Brenners sind.

Soviel auch durch die älteren, grundlegenden Arbeiten des montanistischen Vereins und vorzüglich Ad. Pichler's[1]) über die geologischen Verhältnisse des Brennergebirgs zu unserer Kenntniss gekommen ist, so vermisst man doch bezüglich der nächsten Umgebung des Brenner-Bades ausführlichere Mittheilungen der neuesten Forschungsresultate, welche durch die in so ausgedehnter Weise vorgenommenen

1) Besonders in: „Zur Kenntniss der Phyllite in den tirolischen Centralalpen." (Tschermak's Mineral. und petrograph. Mittheilungen. V. 1883, S. 293.)

Untersuchungen von Oberbergrath Stache[1]) und Dr. Teller gewonnen worden sind. Doch dürfen wir nach den gegebenen Andeutungen wohl vermuthen, dass im Allgemeinen die Gebirgsverhältnisse im Brennergebiete sich ähnlich denen verhalten, welche in so vortrefflicher und eingehender Weise von Dr. Teller[2]) in Bezug auf die zunächst südlich anstossenden Gebirgstheile zwischen Etsch und Eisack, sowie der Höhenzüge nördlich vom Pusterthal geschildert worden sind. Darnach haben wir es in diesen Gebirgstheilen vielfach mit nach Nord überkippten, an parallelen Längsbrüchen überschobenen, isoklinen Einfaltungen jüngerer Ablagerungen in die Glimmerschiefer und Gneisse zu thun und die hier häufig beobachteten Schollen von Triasdolomiten als Denudationsreste von in den Phyllitzügen eingefalteten, ursprünglich ihnen aufgesetzten Ablagerungen aufzufassen.

Ich kann es nicht wagen, nach einem nur wenige Wochen dauernden Aufenthalt in dieser Gegend zur Reconvalescenz, während welchem ich nur gelegentlich einige geologische Untersuchungen vornehmen konnte, den höchst verwickelten Gebirgsbau dieser an sich in vielen Theilen nicht leicht zugänglichen Hochalpen mehr, als die ganz allgemeinen Eindrücke zu schildern, welche der Anblick des Gebirgs auf mich gemacht hat. Je näher man dieses im Einzelnen innerhalb kleiner Gebiete kennen lernt, um so höher scheinen sich die Schwierigkeiten anzuhäufen, die Beobachtungen unter einander richtig zu verbinden, um daraus allgemein gültige Folgerungen zu ziehen, wenn man nicht grössere Striche

1) Stache in Verh. d. k. k. geolog. Reichsanstalt 1872 S. 78; das. S. 251; das. 1873 S. 221; Jahrb. XXIV S. 135 und 333; Verh. 1874 S. 214, 345; Verh. 1880 S. 249 und 250; Jahrb. XXVII S. 143; Zeitschr. d. d. geol. Gesellsch. Bd. 36. 1884 S. 277.

2) In den Verhandlungen der k. k. geol. Reichsanstalt in Wien 1877 S. 231; 1878 S. 61 und 392; 1880 S. 91; 1881 S. 69; 1882 S. 241, 342 und 1883 S. 193.

des Gebirgs zu überblicken in der Lage ist und mit seiner Tektonik im Ganzen sich bekannt machen kann. Doch dürfte immerhin auch ein kleiner Beitrag zur geologischen Kenntniss dieser Gegend nicht ohne Werth sein, um für die Auffassung im grossen Ganzen benützt werden zu können.

Ehe ich die gewonnenen Eindrücke über den Gebirgsbau, namentlich in Bezug auf die warmen Quellen des Brennerbades, weiter schildere, schalte ich einige wenige Bemerkungen über die Beschaffenheit der hier auftretenden Gesteine ein, welche sich Ad. Pichler's[1]) vortrefflichen Beschreibungen alpiner Phyllite zunächst anschliessen. Weit vorherrschend in der Brennergegend ist jener glimmerähnlich, jedoch etwas matter glänzende Thonschiefer, der als Phyllit und Kalkphyllit bezeichnet zu werden pflegt. Im Allgemeinen hat das Gestein in seinen vielfachen Abänderungen auf mich den Eindruck gemacht, dass es dem in anderen Urgebirgsdistrikten, z. B. im bayerisch-böhmischen Waldgebirge als jüngstes archäolithisches Glied entwickelten Schiefer, jedoch mit dem Unterschiede gleicht, dass in letzterem zwar auch ein Gehalt an Kalk, aber auf einzelnen abgeschlossenen Zwischenlagen concentrirt vorkommt, während derselbe im alpinen Phyllit ausser den Ausscheidungen in Lagen häufig noch in geringen Mengen durch die ganzen Massen fein vertheilt sich vorfindet. Nach Stache dürfte auch der Schiefer vom Brenner der paläolithischen Reihe zuzuzählen sein.

Der Phyllit des Brennergebiets besitzt durchschnittlich eine dunkelaschgraue, bald mehr ins Grünliche, bald mehr ins Weissliche, oft ins Schwärzliche spielende Färbung, ist meist flasrigwellig, selten ebenflächig deutlich geschichtet und zeigt auf dem Querbruche eine oft ins Bizarrste gehende Faltelung, wellige Biegungen und Knickungen, wobei thonige

1) Zur Kenntniss der Phyllite der tirol. Centralalpen in Tschermaks Mineralog. Mittheil. V. 1883, 293.

Flasern in dünnsten Lagen mit quarzigen und kalkigen Streifchen wechseln. Durchgehends sind mit diesen Krümmungen parallel verlaufende grössere Ausscheidungen von Quarz und Kalkspath oder beide mit einander vergesellschaftet verbunden. Auf die Bildung dieser Mineralausscheidungen werden wir später zurückkommen.

In Dünnschliffen, welche wegen der welligen Biegungen nicht genau mit den Schichtflächen gleichlaufend herzustellen sind, bemerkt man weissliche glimmerähnliche Blättchen mit unregelmässig ausgezackten Rändern neben grünen, schwach dichroitischen Schüppchen und einer mehr oder weniger reichlichen Beimengung von staubförmigen oder zu grösseren Flocken angehäuften, intensiv schwarzen, undurchsichtigen, kohligen Körnchen. Rutilnädelchen wurden nicht beobachtet. Auf den Querdünnschliffen tritt die flasrige Verflechtung der schuppigen Gemengtheile mit quarzigen wasserhellen Streifchen besonders deutlich hervor. Makroskopisch bemerkt man auf den Schichtflächen ausser weissen, selten braunen Glimmerblättchen häufig eingesprengte grüne Schüppchen[1]) und metallglänzende Blättchen, welche isolirt schwach vom Magnet angezogen werden, eine Reaktion auf Titan erkennen lassen und demnach als Titaneisen anzusprechen sein dürften. In dem mit Flusssäure behandelten Pulver bleiben neben den kohligen Körnchen zahlreiche kleine braune stark dichroitische Nädelchen von Turmalin im Rückstande, in welchem weder Mikrolithe von Rutil, noch, was besonders auffallend ist, von dem sonst so allgemein verbreiteten Zirkon beobachtet worden sind.[2]) Beimengungen von Pyrit und Magneteisen sind zufällig und im Ganzen selten, häufiger jedoch am Brennerbad.

1) Nach den mir von Herrn Professor Cathrein gütigst mitgetheilten Chloritoidschiefern von Prägratten sind diese Beimengungen mit Chloritoid nicht identisch,

2) Ad. Pichler beschreibt (a. a. O. S. 300) einen Phyllit von einem Absturz 6 km von dem Brennerpass als reich an Rutilkryställchen und Rhätizit (Disthen).

Der kohlige Bestandtheil in diesem Reste giebt getrocknet und auf Papier gestrichen einen schwarzen russigen, keinen graphitähnlich glänzenden Strich, kann also nicht als Graphit gelten. Damit stimmt auch sein Verhalten bei einer Behandlung mit chlorsaurem Kalium und Salpetersäure, wobei er sich in gewöhnlicher Temperatur nur wenig verändert, bei Anwendung von Wärme aber vollständig zersetzt. Ausserdem ist derselbe, wenn auch schwierig, verbrennlich. Zur chemischen Analyse wurde ein Schieferstück ausgewählt, welches den vorherrschenden Charakter des Brennerphyllits zeigte und der Gesteinshalde aus dem langen Tunnel unterhalb des Passes entnommen wohl verhältnissmässig weniger Veränderungen, als die zu Tag ausstreichenden Gesteinslagen erlitten haben dürfte. Nach der von Herrn Ass. Ad. Schwager vorgenommenen Analyse hat der Schiefer folgende Zusammensetzung:

Kieselsäure	42,55	Natron	0,99
Titansäure	7,11	Kupferoxyd	Spur.
Thonerde	24,22	Kohlensäure	0,02
Eisenoxyd	8,52	Phosphorsäure	0,43
Eisenoxydul	3,48	Chlor	0,02
Manganoxydul	0,70	Schwefelsäure	0,08
Kalkerde	0,46	Schwefel	0,05
Bittererde	3,70	Kohlige Substanz	0,11
Kali	4,99	Wasser	2,61
			100,04.

Das Ergebniss dieser Analyse stimmt, soweit mir bekannt ist, mit keiner Zusammensetzung anderer ähnlicher Schiefer ganz genau überein. Am ähnlichsten verhält sich der sogen. Bündenerschiefer aus dem Unterengadin bei Tarasp.[1]) Es deutet das auf eine grosse Unbeständigkeit in der Zusammensetzung und auf grosse Verschiedenheit der

1) v. Gümbel, Geologisches aus dem Engadin in dem Jahresbericht der naturf. Gesellsch. Graubündens, XXXI, S. 2.

Gesteine, welche man allgemein als Phyllit bezeichnet. Auch in Bezug auf die näheren Mineralbestandtheile, welche zu ermitteln durch eine Partialanalyse versucht wurde, zeigt sich wenig Uebereinstimmung mit den Phylliten anderer Gegenden. Ein Schiefer von anscheinend dem allgemeinen Charakter der Kalkphyllite des Brennergebiets entsprechender Beschaffenheit aus dem Eisacktunnel unterhalb Gossensass erwies sich zusammengesetzt aus

A) 1,26 % in ganz verdünnter Salzsäure löslichen Carbonaten

B) 35,84 % in concentrirter Salzsäure in der Wärme zersetzten Gemengtheilen und

C) 62,90 % unzersetztem Rest.

Die Carbonate (A) bestehen aus

Kalkcarbonat	0,900 =	71,43 %
Bittererdecarbonat . .	0,114	9,05 "
Eisencarbonat	0,210	16,66 "
Mangancarbonat . . .	0,036	2,86 "
	1,260	100,00 %

Der durch concentrirte Salzsäure zersetzte Gemengtheil gehört vorwaltend der grünfärbenden Beimengung an. Denn nach der Einwirkung der Säure zeigt der Rückstand eine weissliche Färbung, während der grünliche Farbenton verschwunden ist. Die zersetzte 35,84 %ige grüne Substanz besteht in % berechnet aus

Kieselsäure	20,8500
Titansäure	0,7228
Thonerde	10,7386
Eisenoxyd	20,0160
Eisenoxydul	29,1900
Manganoxydul	2,0850
Kalkerde und Alkalien	Spuren
Bittererde	4,0042
Wasser	12,5100
	100,1166

Unter den vielen grünen, dem Chlorit ähnlichen, jedoch durch Salzsäure zersetzbaren Mineralien scheinen List's Metachlorit und der Thuringit in ihrer Zusammensetzung der des grünen Gemengtheils in dem analysirten Schiefer am nächsten zu kommen. Von Chloritoid kann nach dem Verhalten zur Salzsäure ebensowenig wie nach dem schwachen Dichroismus im polarisirten Lichte die Rede sein. Die Zahlen dürften jedoch nicht genau der wirklichen Zusammensetzung des Minerals entsprechen, weil durch die Säure wohl auch noch andere wenn auch untergeordnete Beimengungen wenigstens theilweise mit zersetzt werden, worauf der beträchtliche Gehalt an Eisenoxyd und Titansäure hinweist. Es ist überhaupt zweifelhaft, ob der grünfärhende Gemengtheil der sog. Phyllite einem einfachen constant zusammengesetzten Mineral entspricht. Ich habe daher für die Bezeichnung dieser grünfärbenden Bestandtheile der Phyllite im Allgemeinen den Namen Chloropit vorgeschlagen.

Der nach der Behandlung mit Salzsäure übrig bleibende, 62,9 % betragende Rest besteht aus

Kieselsäure	50,05
Titansäure	2,20
Thonerde	35,25
Eisenoxyd	2,50
Kalkerde	Spuren
Bittererde	1,08
Kali	5,07
Natron	1,60
Kohlige Theile und H_2O	2,00
	99,75

Es entspricht dies einer mit Quarz vermengten Sericit- oder Glimmer-artigen Substanz. Es ist demnach der Phyllit des Brenners der Hauptsache nach aus einem Glimmer-ähnlichen, einem chloritischen Mineral, aus Quarz und Kalkcarbonat zusammengesetzt.

Wenn man nun auch den durch diese Analysen gewonnenen Zahlen keineswegs den Werth beilegen darf, dass dieselben den mittleren Gehalt der Schiefer genau angeben, so scheint mir doch, dass neben der mikroskopisch-mineralogischen Untersuchung auch die chemische Zerlegung nicht von der Hand gewiesen werden darf, um weitere Hilfsmittel zur Unterscheidung der so verschiedenartigen, aber dem blossen Ansehen nach sehr ähnlichen Thonschiefergebilden zu gewinnen. In diesem Sinne mag dieser kleine Beitrag aufgefasst werden.

Mit diesen Glimmer-ähnlich glänzenden Schiefern, bei welchen zum Unterschied von dem ächten Glimmerschiefer der Glimmer-artige Bestandtheil sich nicht in zusammenhängenden, elastisch biegsamen Blättchen isoliren lässt, sind Einlagerungen von Quarzitschiefer spärlich, solche von grünen chloritischen Schiefern häufiger vergesellschaftet. Bei ersteren ist der Glimmer meist in dünnen weissen Blättchen deutlich entwickelt. Weit öfter stösst man auf grüne Schiefer, welche stellenweise wie im inneren Pflerschthal in hornblendige und dioritische Gesteine verlaufen.

Diese grünen Schiefer besitzen dem Aeusseren nach das Ansehen der Chloritschiefer, setzen jedoch in dieser Gegend keine grösseren Gebirgstheile zusammen, sondern beschränken sich auf schmale Zonen zwischen den Phylliten, aus denen sie allmälig durch Ueberhandnahme des grünen Gemengtheils hervorgehen. Dementsprechend werden sie von Salzsäure in der Kochhitze völlig zersetzt und geben mit Hinterlassung weisser Schüppchen und quarziger Theile eine an Eisenoxydul reiche Lösung. Doch ist der Gehalt an dem färbenden grünen Gemengtheil, der sich wie der Chloropit des Phyllits verhält, ein sehr wechselnder. In dem grünen Schiefer neben einem Quarzitschieferlager zwischen Gossensass und Sterzing finden sich bis 0,25 mm lange und 0,1 mm dicke Turmalinkryställchen von brauner Farbe sehr

häufig, seltener Zirkon in länglich runden Körnchen und Krystallsäulchen, dann Rutil in kleinen Säulchen und in bis 0,2 mm grossen Körnchen, Würfelchen von Eisenkies und Apatit neben weissen glimmerähnlichen Schüppchen und Quarz.

Aehnlich verhält sich der grüne Schiefer im Dorfe Gries. Doch fehlen hier Beimengungen von Rutil und Turmalin, während neben Zirkon metallischglänzende Magneteisenkörnchen, Apatit, Quarz und Kalkspath reichlich vorkommen.

In der Nähe dieses Fundpunktes stehen im Eingang ins Obernberger Thal mächtige Schichten des grünen Schiefers an. Hier herrschen in den Beimengungen Zirkon und Eisenkies neben sehr zahlreichen Körnchen eines wahrscheinlich dem Andalusit angehörigen Minerals vor, dagegen werden Turmalin-, Rutil- und Apatit-Einschlüsse vermisst.

Ein gleichgefärbter Schiefer bei Venaders im Obernberger Thal zeichnet sich durch den reichen Gehalt an eckigen Magneteisenkörnchen aus; daneben kommen auch Kalkspathkörnchen vor; Turmalin, Rutil und Zirkon wurden nicht beobachtet.

Besonders ausgezeichnet ist der grüne Schiefer in der Nähe des Dorfs Obernberg, der so von Epidot vollgespickt ist, dass er zuweilen in Epidotschiefer verläuft.

Aehnliche grüne Schiefer werden bekanntlich in der Nähe von Sterzing an den Gehängen des Pfitscher Thales von Serpentin und Hornblendeschiefer begleitet. Eine gewisse Aehnlichkeit mit den grünen Schiefern der Silvretta-Gruppe, welche ihre Ausläufer bis Nauders und bis zur Strasse bei Finstermünz vorschieben, ist unverkennbar; doch ist die Zone am Brenner nur schwach entwickelt, gleichsam nur angedeutet. Ein weiterer Vergleich mit den Pietre verdi Gastaldi's in den Westalpen liegt nahe.

Eine Reihe von Gesteinen aus diesen Alpentheilen, welche ich der Gefälligkeit des Herrn Prof. Sacco in Turin ver-

dankte, besteht theils aus typischen Glimmerschieferstücken, welchen oft Beimengungen von grünlichem Glimmer einen entsprechenden Farbenton ertheilen, theils aus Chlorit- und Strahlsteinschiefer namentlich aus dem Chialamberto Thale. Ihnen schliessen sich ausgezeichnete Serpentine in Begleitung von Serpentinschiefer, Dioriten und Gablero-artigen Gesteinen an. Grüne Schiefer nach Art der oben erwähnten aus der Brennergegend fanden sich unter dieser Sendung nicht. Sehr eigenthümlich und bemerkenswerth ist dagegen das unter der Bezeichnung Besimaudit von Herrn Sacco gesendete Gestein, welches gleichfalls eine grünliche Färbung besitzt.

Diese Besimaudite (Zaccagna in Boll. d. r. comit. geol. 1887. S. 416) sind aus den West- und ligurischen Alpen bekannt. Unter den Originalexemplaren dieses Gesteins gehören zwei Stücke unzweideutig einem glimmerfreien Quarzporphyr an, zwei Stücke sind aber sehr unseren Zwischenschichten ähnlich. Diese innige Verbindung von Porphyr mit den fast tuffartig ausgebildeten Schiefern spricht sehr zu Gunsten ihrer Gleichstellung mit Permbildnngen.

Der eine grünlich gefärbte Porphyr vom Mt. Besimauda in den ligurischen Alpen selbst besteht aus einer äusserst feinkrystallinischen, feldspathig-quarzitischen Grundmasse mit Aggregatpolarisation, in welcher reichlich grüuliche Körnchen und Blättchen eines Chlorit-artigen Minerals in streifigen und krystallähnlich umgrenzten Partien eingebettet sind. Ganz vereinzelt finden sich darin stark pleochroitische Nädelchen von Hornblende, Körnchen von Magneteisen und Zirkon. In dieser Grundmasse liegen meist scharf umgrenzte, weisse Orthoklasausscheidungen nnd nahezu in gleicher Menge meist in Krystallform ausgebildete wasserhelle Quarze voll von Bläschen, häufig von klaffenden Rissen durchzogen, welche von der Substanz der Grundmasse ausgefüllt sind.

Das spezifische Gewicht des Gesteins beträgt 2,740—2,744

und ist auffallend hoch. Es mag dies von dem beigemengten Magneteisen herrühren.

Der möglichst rein isolirte in grösseren Körnern ausgeschiedene Feldspathbestandtheil besteht nach Analyse I und das Gestein im Ganzen nach Analyse II und ein zweites Vorkommen eines röthlich gefärbten Gesteines von Valle delle Corseglia (III) (Analyse von Ad. Schwager) aus:

	I	II	III
Kieselsäure	68,12	71,25	68,52
Titansäure	—	Spur	Spur
Thonerde	21,24	12,40	14,51
Eisenoxyd	Spur	6,60	5,71
Mangan	Spur	Spur	Spur
Kalkerde	1,26	0,20	1,26
Magnesia	0,62	0,63	0,63
Kali	6,00	5,20	5,24
Natron	3,60	3,02	3,22
Glühverlust	—	0,70	0,91
	100,84	100,00	100,00

Bei dem Feldspathbestandtheile ist der hohe Gehalt an Natron gegen Kali auffällig. Die optische Untersuchung hat jedoch ergeben, dass das Mineral der Orthoklas- und nicht der Plagioklasreihe angehört, wie dies namentlich die beiden Spaltflächen, welche keine Spur einer Parallelstreifung wahrnehmen lassen, bestätigen. Dem Orthoklas gegenüber erweist sich die Thonstein-ähnliche Grundmasse ärmer an Alkalien. Auch hier tritt der Natrongehalt stark hervor.

Das zweite Exemplar vom „Valle delle Corseglia olle Sella della Roschera" ist ein fleischrothes Gestein von ähnlicher Beschaffenheit wie der oben erwähnte Porphyr, nur dass die Grundmasse keine oder nur selten chloritische Einmengungen besitzt, dagegen deutlich eine Fluidaltextur erkennen lässt. Der Orthoklas ist meist stark zersetzt und zeigt Aggregatpolarisation.

Die beiden Exemplare des schiefrigen Besimaudits aus dem Valle del Pesio der ligurischen Alpen S. von Cuneo, das eine aus dem Anfang des Thales (I), das andere von „Treta valle del Pesio e quelle dell' Ellero" (II) gleichen, abgesehen von ihrer grünen Färbung, sehr den die Triaskalke der Centralalpen zunächst unterlagernden Gesteinen. Es sind knollig uneben wellig geschichtete Schiefer, in deren grünen chloritischen flasrigen Streifchen reichlich zum Theil grosse rundlich abgegrenzte Ausscheidungen von weissem und fleischrothem Orthoklas und wasserhellem Quarze eingebettet liegen. Die Hauptmasse der Flasern und die Mineralausscheidungen erinnern lebhaft an die oben erwähnten Porphyre vom Monte Besimauda. Die Orthoklasknollen sind stark zerklüftet, oft fast ganz zerstört und durch Hohlräume ersetzt, deren Wände zum Theil mit braunen Eisen- und Mangan-haltigen Quarzüberzügen bedeckt sind.

In Dünnschliffen, welche senkrecht zu den Schichtflächen hergestellt sind, bemerkt man in einander flasrig verlaufende Streifchen des grünen, chloritischen Gemengtheils neben feldspathartigen und quarzitischen Ausscheidungen. Auch hier wurden Beimengungen von Plagioklas nicht beobachtet. Im Allgemeinen gleicht die Grundmasse — abgesehen von ihrer deutlich parallelflasrigen Textur — sehr jener des Besimauda-Porphyrs, dessen tuffig geschichtete Abänderung diese Schiefer darzustellen scheinen.

Durch verdünnte Salzsäure werden nur ganz unbeträchtliche Theile des Gesteins zersetzt, nämlich eine geringe Beimengung von Kalkcarbonat und etwas Thonerdesilikat. Der grüne chloritische Gemengtheil bleibt nahezu unverändert. In Dünnschliffen lässt sich wahrnehmen, dass die körnig streifige Hauptmasse Aggregatpolarisation besitzt; die grünen chloritischen Streifen sind nur in geringem Grade dichroitisch und die Feldspathausscheidungen verhalten sich so trübe, dass man ihre optischen Eigenschaften nicht näher prüfen

kann. In einem Exemplar wurden kleine fadenförmige gekrümmte Nädelchen von Glaucophan beobachtet, der jedoch keine constante Beimengung zu sein scheint, da er in anderen Exemplaren des Schiefers fehlt. Die Bauschanalyse ergab folgende Zusammensetzung der beiden oben unter I und II bezeichneten Schiefer.

	I	II
Kieselsäure	73,50	71,00
Titansäure	0,50	1,25
Thonerde	8,88	10,68
Eisenoxyd (Oxydul?)	6,70	3,50
Manganoxydul	0,40	Spur
Kalkerde	0,50	1,00
Bittererde	0,96	0,40
Kali	3,40	5,50
Natron	5,30	4,80
Glühverlust	0,70	2,00
	100,84	100,13

Die Quarz- und Kalklinsen im Phyllit.

Von allgemeinerem geologischem Interesse ist die sonderbare Art, in welcher die linsenförmigen Ausscheidungen von Kalk und Quarz, indem sie den bizarrsten Biegungen und Faltungen des Phyllits folgen, aufzutreten pflegen. Wollte man annehmen, dass diese Verzerrungen in Folge eines Zusammenschubs durch dislocirende Kräfte oder durch Seitendruck erst entstanden wären, nachdem die ursprünglich mehr oder weniger ebengeschichteten Schiefer bereits verfestigt waren, so könnte dies nicht anders gedacht werden, als dass die oft beträchtlich dicken und dabei in engsten Krümmungen zusammengebogenen Linsen und Streifen von Quarz oder Kalkspath in kleinste Trümmer zerquetscht, zersprengt und zerstückelt worden wären. Demgegenüber erweisen sich diese Ausschei-

dungen, wie wir sie jetzt finden, als ganz compakte Körper, an denen man weder auf glattgeschliffenen und polirten Querschnitten mit der Lupe, noch in quergeschnittenen Dünnschliffen unter dem Mikroskop die Zeichen einer solchen Zertrümmerung wahrnehmen kann. Es zeigen sich nur ganz vereinzelte Querrisse, deren Anzahl in gar keinem Verhältnisse zu dem Grad der Krümmungen und Biegungen stehen. Sollten aber vielleicht die entstandenen Risse und Spältchen nachträglich wieder durch infiltrirte Mineralsubstanz ausgefüllt und dadurch die zerstückelte Masse wieder zu einem compakten Ganzen verkittet, gleichsam verheilt worden sein? Auch in diesem Falle müssten sich die Spuren einer solchen Vernarbung in den Dünnschliffen wahrnehmen lassen, wie man sie so deutlich an den unzweifelhaft durch Gebirgsdruck zusammengefalteten Kalk- und Hornsteinschichten beobachten kann. Die gekrümmten Kalklinsen erweisen sich unter dem Mikroskop so regelmässig krystallinisch-körnig zusammengesetzt, ohne Queradern einer zweiten Kalkspathansiedelung, wie der körnige Kalk der nicht gebogenen Lagen. In den Quarzlinsen erfüllt die Kieselsubstanz nicht gleichmässig den Raum, sondern es wechseln darin sandkornähnliche rundliche Parthien ohne scharfe Abgrenzungen mit opaken, gleichsam eine Grundmasse darstellenden Theilen, wobei in der Vertheilung der helleren Flecken eine gewisse Abhängigkeit von der äusseren Form der Linsen sich zu erkennen giebt, ohne dass jedoch eine concentrisch schalige Anordnung sich bemerkbar macht, wie eine solche bei den durch Lateralsecretion entstandenen Drusenbildungen vorzukommen pflegt. Dieses Verhalten und die Thatsache, dass, soweit meine Beobachtungen reichen, nie in der Mitte der Linsen sich ein Hohlraum, der etwa so, wie es bei Drusen gewöhnlich der Fall ist, mit Krystallen besetzt wäre, vorfindet, lassen den Gedanken nicht aufkommen, dass die Linsen als Ausfüllungen von Hohlräumen, welche etwa erst in Folge der Zusammen-

stauchung der schon verfestigten Thonschieferschichten entstanden wären, unter Vermittlung einer Lateralsecretion angesehen werden dürfen. Damit stimmt auch eine andere bemerkenswerthe Erscheinung, welches sich bei manchen Quarzlinsen wahrnehmen lässt. Es finden sich nämlich in Mitten der Quarzmassen solcher Linsen grössere oder kleinere Ausscheidungen von Kalk- oder Braunspath[1]) theils in Krystallbutzen porphyrähnlich eingesprengt, theils in Streifen eingebettet. Sie sind nicht etwa erst nachträglich auf Spalten oder Klüften des Quarzes entstanden, sondern nach der Art, in welcher sie mit dem Quarz verwachsen sind, ist anzunehmen, dass sie nahezu gleichzeitig mit letzterem gebildet wurden. Nimmt man mit Säuren solche Kalkspaththeile weg, so sieht man in dem entstandenen Hohlraum den Quarz mit vielfachen Zacken und Lamellen vorragen, so dass an den Begrenzungsflächen beide Mineralien mit einander verwachsen, gleichsam verzapft erscheinen. Auch an diesen oft sehr grosskrystallinischen Kalkspathausscheidungen bemerkt man nicht eine Spur einer erlittenen Quetschung und Zersprengung.

Derartige bald mehr linsenförmige, bald mehr streifenartige Ausscheidungen von Quarz und Kalkspath, wie sie im Grossen zwischen den Phyllitlagen eingebettet sind, wiederholen sich in bei vielen untersuchten Stücken bis ins Kleinste gehenden, mit unbewaffnetem Auge kaum unterscheidbaren Zügen, welche immer mit den Falten und Biegungen des Schiefers parallel verlaufen. Man muss wohl annehmen, dass ihre Ausbildung in krystallinischen Massen gleichzeitig mit der Verfestigung der Schiefersubstanzen des Phyllits stattfand so etwa, wie gewisse Hornsteinausscheidungen in Kalkschichten und dass die entsprechenden Faltelungen, Biegungen und Knickungen des Schiefers nicht Folgen erlittenen seit-

1) Die Analyse eines solchen Kalkspaths ergab als dessen Zusammensetzung: $CaCO_3 = 88{,}42$; $MgCO_3 = 3{,}42$; $FeCO_3 = 7{,}26$ und $MnCO_3 = 0{,}90$.

lichen Gebirgsdruckes sind, sondern mit der Ausbildung der krystallinischen Mineraltheilchen und mit ihrem Festwerden in ursächlichem Zusammenhange stehen.

Kalkstein-Ein- und Auflagerungen.

Es ist nicht zu zweifeln, dass auch die mächtigen, in dicken Bänken auftretenden Lagen körnigen Kalkes einem ähnlichen Bildungsprocess ihre Entstehung verdanken. Doch ist es nicht immer leicht, die mit diesen Phyllitschiefern vergesellschafteten krystallinischen Kalke als genetisch zu letzteren gehörige Glieder sicher zu erkennen. Oft gleichen die in diesen Gebieten den älteren Schieferschichten, nicht selten sogar ziemlich gleichförmig aufgesetzten jüngeren Triaskalke ihnen so sehr, dass eine Verwechselung um so leichter stattfinden kann, als die jüngeren Kalke hier vorherrschend hochgradig krystallinisch entwickelt sind und von glimmerartigen und phyllitähnlichen Ein- und Zwischenlagerungen begleitet werden. Dies beweisen die in verschiedenen Zeiten hergestellten geologischen Karten dieses Gebietes, bei welchen mehrfach derartige körnige Kalke bald als jüngere Triasbildungen, bald als zur Schieferbildung gehörige Einlagerungen dargestellt sind. Einem solchen Verhältnisse begegnen wir auch in der Brennergegend, wo z. B. zwischen Brennerpass und Gossensass auf der Ostseite in mehreren Steinbrüchen (auch in der Nähe des Bades) Lagen von körnigem Kalke unzweideutig dem Phyllit angehörig ausstreichen, während auf der Westseite von dem majestätischen Kalkstock des Tribulaun's am nördlichen Gehänge des Pflerschthales eine mächtige Kalkzone bis dicht an die Brennereinsattelung heranreicht, welche in der sonst vortrefflichen Karte des montanistischen Vereins gleichfalls zum älteren krystallinischen Kalk gehörig dargestellt ist, während der Kalk des Tribulauns selbst aber dem jüngeren System zugetheilt erscheint. In neueren Karten ist derselbe Kalkzug im Norden

vom Pflerschthale, den wir kurz Pflerschkalkkeil nennen wollen, als jüngere Bildung aufgefasst. Aehnlich verhält es sich mit dem Kalklager bei Mauls und im Penser Gebirge, das neulich erst durch Ad. Pichler, dann durch Teller als *Gyroporella*-haltiger Triaskalk erkannt wurde.

Solche sicher leitende Versteinerungen wie die *Gyroporellen* sind aber in vielen Kalkzügen viel zu selten, wenn sie nicht ganz fehlen, um zur Unterscheidung beider kalkiger Bildungen benützt werden zu können. Dagegen scheint ein Unterschied in der chemisch-mineralogischen Beschaffenheit zu bestehen, indem das ältere Gestein als Kalk, das jüngere — wenigstens vorherrschend — als Dolomit sich erweist. Dies gilt namentlich vom Brennergebiet. Ob dieses Verhältniss auch sonst für grössere Gebirgstheile gleich bleibt, ist noch nicht nachgewiesen. Doch möchte ich auf dieses Verhalten durch folgende Angaben aufmerksam machen und dasselbe für weitere Untersuchungen empfehlen.

Ich fand nämlich die körnigen Kalke, welche unzweideutig Einlagerungen im Phyllit angehören, zusammengesetzt

1. aus einem Steinbruch oberhalb der ersten Eisackbrücke zwischen Gossensass und Brennerbad;
2. aus einem Steinbruche zunächst an der Villa von Brennerbad;
3. aus einem Lager zwischen Gossensass und Sterzing;
4. aus den grossen Steinbrüchen von Ratschings bei Sterzing:

	1.	2.	3.	4.
Kalkcarbonat	99,628	99,540	99,526	99,350
Bittererdecarbonat	0,007	0,015	0,024	0,050
Eisen- und Mangancarbonat	0,015	Spur	Spur	0,050
Ungelöster Rückstand . . .	0,350	0,445	0,450	0,550
	100,000	100,000	100,000	100,000

Es sind dies demnach ziemlich reine Kalkgesteine.

Dagegen erwiesen sich vermuthlich der Trias angehörige Gesteine von

1. der südlichen Wand des Tribulaun's;
2. vom Stock der Weisswand SW. vom Tribulaun;
3. von den zum Obernberger-Thal abfallenden Wänden des Tribulaun's;
4. vom Schleierberg zwischen Pflersch- und Ridnauerthal;
5. von der Weissspitz zunächst südlich von Hühnerspiel bei Gossensass;

	1	2	3	4	5	6
Kalkcarbonat[1]	66,50	66,24	86,80	73,80	75,30	55,19
Bittererdecarbonat . . .	28,08	29,60	10,58	22,77	21,25	44,02
Fe- und Mn-Carbonat .	0,34	0,41	0,21	0,32	0,07	0,58
Unlöslicher Rest . . .	4,17	3,75	2.25	3,11	3,20	0.21
Summe	99,89	100,00	99,84	100,00	99,82	100,00

Zu dieser Untersuchung wurden besonders solche Gesteine verwendet, welche keine deutlichen Merkmale ihrer Zugehörigkeit zu jüngeren Ablagerungen an sich trugen (den Dolomit von Mauls ausgenommen) und auf den Schichtflächen einige glimmerähnliche Schüppchen oder einen an Phyllit erinnernden zum Theil chloritischen Ueberzug erkennen liessen. Ueber letztere Beimengungen werden noch einige Bemerkungen später beigefügt werden.

Zunächst beweisen die angegebenen Zahlen, dass mehrere der untersuchten Gesteine die Zusammensetzung normaler Dolomite besitzen, andere dagegen zu wenigstens stark dolomitischen Kalken zu rechnen sind. Nur das Gestein der Probe Nr. 15 nähert sich sehr den Phyllitkalken. In der That findet sich dieser Kalk auch an einer Stelle, wo an einer grossartigen Verwerfungsspalte die Phyllitschichten

1) Das Kalkcarbonat wurde meist indirekt bestimmt.

6—14. von 9 verschiedenen Stellen des Pflerschkalkkeils;

15. neben dem aus dem Pflersch- zum Obernberger-Thal führenden Jägersteig;

16. graue, deutlich krystallinische Gesteine von Mauls[1]) mit bestimmt erkennbaren Einschlüssen von *Gyroporellen.*

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
68,34	57,06	53,55	55,64	55,59	53,90	71,00	61,13	92,50	55,32
27,85	42,50	45,16	44,02	43,26	45,16	25,81	36,20	1,06	42 48
0,31	0,09	0,97	0,05	0,75	0,61	0,05	0,42	Spur	1,80
3,15	0,35	0,32	0.29	0,40	0,33	3,21	2,25	5,30	0,40
100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	99,07	100,00	98,87	100,00

in den Pflerschkalkkeil hineingeschoben erscheinen. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass das Gestein den Phyllitschichten selbst angehört. Jedenfalls empfiehlt es sich, auch in dieser Richtung die Untersuchung der verschiedenen, den centralalpinen Schieferbergen aufgesetzten oder eingefalteten kalkartigen Schichten weiter zu verfolgen, um allgemein gültige Schlüsse zu ziehen, welche jene aus dem Verhalten der Gesteine in der Brennergegend gezogenen, vorläufig nur für diesen Gebirgstheil gültigen Folgerungen entweder bestätigen oder beschränken werden.

Besondere Beachtung verdienen die mit diesen Trias-Dolomiten oder dolomitischen Kalken vergesellschafteten phyllitischen und chloritischen Einlagerungen. Sie erinnern lebhaft an die glänzenden, glimmerähnlichen oder chloritischen Ueberzüge auf den Schichtflächen vieler jüngerer

1) Originalstücke, welche ich der Güte des Herrn Prof. v. Pichler verdanke.

Ablagerungen in den Centralalpen. Ich beobachtete fast die gleichen Gebilde in den tiefsten Schichten des Ortler-Stocks am Marltpass[1]), an den Ueberzügen, mit welchen die Versteinerungen in den Werfener Schichten der grossen Plattenbrüche bei Nona in den Bergamasker Alpen[2]) überkleidet sind, auf den Gleitflächen der Kalkkeile am Gstellihorn in den Schweizer Alpen[3]), in den phyllitartigen Zwischenschichten von Andermatt, in dem sog. Casannaschiefer, ja selbst in dem Glimmerschiefer-ähnlichen Gestein des Nufener Passes mit seinen *Beleminten*-Einschlüssen. Hieher scheinen auch die Gesteine zu gehören, welche Kilian[4]) aus den Savoyer Alpen als Calcaires et Marbres phylliteux bezeichnet.

Ich verdanke der Gefälligkeit des Herrn Kilian mehrere Proben der sog. Schistes lustrés und Calcaires phylliteux aus den Savoyer Alpen. Die Schiefer sind tiefschwarzgrau, halbglimmerig- oder eigentlich fettglänzend mit einzelnen glimmerglänzenden weissen Schüppchen. In Dünnschliffen und i. p. L. zeigen dieselben Aggregetpolarisation und in der körnig schuppigen Hauptmasse kleinste undurchsichtige Stäbchen, welche wohl den Rutilnädelchen des gewöhnlichen paläolithischen Thonschiefers zu entsprechen scheinen, und daneben gleichfalls sehr zahlreiche, etwas grössere, durchsichtige Nädelchen, welche einzeln eine solche Grösse erreichen, dass man u. d. M. deutlich die bräunlichgraue Färbung, die Parallelstreifung der Säulenflächen und die Flächenzuspitzung an beiden Enden der Kryställchen erkennen kann. Diese besitzen in hohem Grade Dichromismus und gehören ohne Zweifel zum Turmalin, wie die ganz ähnlichen Nädelchen im Thonschiefer vom Brenner. Das färbende Princip rührt

1) v. Gümbel in Sitzb. d. bayer. Akad. d. Wiss. 1891. S. 100.

2) Ders., Das. 1880 S. 235.

3) Ders., Geolog. aus dem Engadin in Jahresber. d. r. Gesellsch. Graubündens XXXI S. 40.

4) In Bullet. d. l. soc. Geol. d. France; 3 Ser. 1. XIX p. 589.

von meist in Flocken gruppirten schwarzen Körnchen (nicht Schüppchen) her, welche geglüht ziemlich leicht verbrennen und mit chlorsaurem Kalium und Salpetersäure in der Wärme behandelt Chlor entwickeln und in eine gelbliche Substanz sich zersetzen. Diese kohligen Beimengungen verhalten sich demnach nicht wie Graphit, sondern wie jüngere kohlige Substanzen. Aehnlich verhält sich auch — um dies gleich hier zu bemerken — der schwärzliche Rückstand, welchen neben quarzigen Theilchen die Calcaires phylliteux nach Behandeln mit verdünnter Salzsäure zurücklassen.

Von diesen Kalken wurden zwei Proben näher untersucht. Die eine aus der Gegend von Maurin (B. Alpes) ist fein krystallinisch körnig ausgebildet, lichtgrau gefärbt und mit phyllitischen Theilchen durchwachsen; das zweite Exemplar von Bonneval in Savoyen ist dünngeschichtet, krystallinisch körnig und mit schwarzgrauem Phyllit verflasert. Beide sind körnige Kalke (nicht Dolomite) mit einem nur geringen Gehalte an Magnesium- und Eisencarbonat. Eine Analyse ergab folgende Zusammensetzung:

	I. Val la Noire Queyras	II. Bonneval.
Kohlensaure Kalkerde	39,00	45,43
„ Bittererde	3,80	0,95
„ Eisenoxydul	1,57	3,62
„ Manganoxydul	Spur	Spur
In verdünnter ClH unzersetzt	55,63	50,00
	100,00	100,00

In den Schites lustrés sind auch Stöcke von Serpentin eingelagert und dadurch scheint ein Uebergang in mehr chloritische Schiefer (Schistes verts) angedeutet zu werden.

Man pflegt derartige krystallinische Einlagerungen als Folge **metamorphischer** Umänderungen aufzufassen und dabei von dem Einfluss des Gebirgsdrucks alles Mögliche oder Unmögliche abzuleiten. Mir scheint die Annahme derartiger unerwiesener Einflüsse bei den in wenig veränderter Lagerung

auf den krystallinischen Schiefern der Centralalpen aufgesetzten Kalkschollen völlig ausgeschlossen und ich sehe darin keine anderen Erscheinungen, als solche, welche analog bei der Umbildung ursprünglich sedimentärer Niederschläge zu verfestigten Gesteinen überhaupt Platz gegriffen haben. Sie sind Folgen diagenetischer Processe und ihre Entstehung aus ursprünglich thonigem Material nicht auffallender und räthselhafter, als die pseudomorphose Umbildung von Glimmer etwa aus Granat oder Andalusit, von Chlorit aus Augit und die auch gegenwärtig noch an verschiedenen seichten Stellen der Meere gleichsam unter unseren Augen sich vollziehende Ausscheidung von Glaukonit in den Kammern der *Foraminiferen.*[1]) Was verhindert anzunehmen, dass die Bildungsprocesse, durch welche später pseudomorphisch aus Orthoklas, Granat, Andalusit u. s. w. Glimmer hervorgegangen ist, unter besonderen Umständen stellenweise auch schon bei der anfänglichen Entstehung solcher Schiefer mit krystallinischer Textur, wie solche in den Alpen in den verschiedensten Horizonten wiederkehren, wirksam waren? Es scheint dies viel besser den unserer direkten Beobachtung zugänglichen und uns bekannten Verhältnissen zu entsprechen, als eine Theorie der umbildenden Druckwirkung, die nicht erwiesen ist. In diese Reihe der Erscheinungen gehören auch gewisse andere krystallinische Mineralbildungen unserer Gegend.

Chlorit-ähnliche, deutlich krystallinisch ausgebildete, bis 5 mm dicke Lagen bedecken die Schichtflächen der tiefsten Triaskalke im inneren Pflerschthale. Diese Mineralsubstanz ist tief lauchgrün gefärbt, deutlich dichroitisch, schmilzt v. d. L. leicht zu schwarzen magnetischen Kügelchen und wird von concentrirter Salzsäure bei Kochhitze unter Hinterlassung von pulveriger Kieselsäure zersetzt. Das spezifische Gewicht

1) v. Gümbel, Ueber die Natur und Bildung des Glaukonits. In den Sitzungsber. d. bayer. Akad. d. Wiss. math.-phys. Classe 1886 III S. 417.

beträgt 3,008—3,01. Eine sehr dunkle Varietät (I) und eine etwas lichter gefärbte (II), letztere nach einer Analyse von A. Schwager, besteht aus:

	I.	II.
Kieselsäure	23,25	24,97
Thonerde	14,90	23,07
Eisenoxyd	9,91	—
Eisenoxydul	38,00	28,29
Manganoxydul	0,85	—
Kalkerde	Spur	0,06
Magnesia	1,70	12,91
Kali	0,60	0,16
Natron		0,47
Wasser	9,25	10,75
	98,45	100,68

Diese Substanzen zeichnen sich durch den hohen Gehalt an Eisenoxyden aus und schliessen sich eng an den Chlorit an. Ein Theil der Thonerde scheint in diesen beiden Proben durch Eisenoxyd, ein Theil der Magnesia durch Eisenoxydul vertreten zu sein. Sie lassen sich ihrem Zusammensetzung nach mit dem Metachlorit und Aphrosiderit vergleichen.

In ähnlicher Weise, oft mit dem grünen Mineral verwachsen, kommt auch eine Glimmer- oder Sericit-ähnliche Masse als krustenartiger Ueberzug über die Schichtfläche der Triaskalke in vielfach sich wiederholenden Lagen vor.

Die grünlich- bis gelblichweiss gefärbte Masse besitzt eine schuppigkörnige Textur, schmilzt ziemlich schwierig v. d. L. zu einem grünlichweissen, mit Kobaltnitrat sich schön blau färbenden Email, hat ein spezifisches Gewicht von 2,75—2,80 und wird von Schwefelsäure oder Salzsäure nur schwierig und theilweise zersetzt.

Die chemische Analyse hat folgende Zusammensetzung nachgewiesen:

	I.	II.
Kieselerde	44,90	42,72
Thonerde	39,61	39,00
Eisenoxyd	2,12	Spur
Manganoxydul	Spur	—
Kalkerde , ...	Spur	0,40
Magnesia	2,17	7,02
Kali	3,49	5,88
Natron	2,93	5,85
Wasser und Glühverlust .	4,25	—
	99,47	100,87

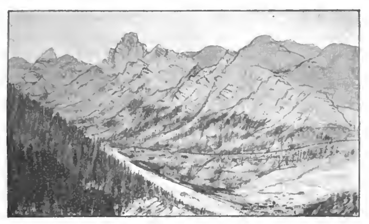
Mehr vereinzelte Blättchen eines weissen, Glimmer-artigen Minerals, dessen Zusammensetzung die Analyse II anzeigt, kommen theils auf den Schichtflächen der höheren Kalkbänke, theils mitten im Kalk, beziehungsweise Dolomit, eingeschlossen vor. Es scheint dieses Auftreten anzudeuten, dass die krystallinische Ausbildung des Kalks und Dolomits gleichzeitig mit der Entstehung der Glimmerartigen Mineralien und zwar gleich anfänglich, nicht erst durch eine nachträgliche Umbildung in Folge von Gebirgsdruck sich vollzogen hat. Beide Mineralien schliessen sich ihrer Zusammensetzung nach an die Glimmergruppe an, ohne aber mit irgend einer Abänderung derselben völlig übereinzustimmen. Es möchte dies auf eine theilweise erlittene Zersetzung zurückzuführen sein.

Der Kalkkeil am Pflerschthal.

Das Mittel, welches die Zusammensetzung der äusserlich sehr ähnlichen kalkigen Gesteine zu ihrer Unterscheidung in Aussicht stellt, wäre um so erwünschter, je verwickelter die Lagerungsverhältnisse sind, unter welchen die Kalke sich am Aufbau des Gebirgs betheiligen. Ein Beispiel hiervon liefert der Kalkkeil[1]) am Nordrande des Pflerschthales, dessen

1) Die Bezeichnung ist zwar nicht ganz richtig, weil dolomitisches Gestein vorherrscht, aber doch leichter verständlich als Dolomitkeil, was auch nicht ganz zutreffend wäre.

vom Tribulaun-Stock auslaufende, in SO.-Richtung sich allmälich verschmälernde Zunge an dem älteren Schiefergebirge wie bloss angeklebt erscheint, in der That aber zwischen dasselbe eingeschoben sich erweist.[1])



Der Kalkkeil des Pflerschthales.

Die, wie wir gesehen haben, vorwaltend dolomitischen Schichten dieses Keils liegen auf der Nordseite des Pflerschthales sanft nach NO. geneigt auf fast in gleicher Richtung, aber steiler einfallenden krystallinischen Schiefern. Die unmittelbare Auflagerungsfläche ist zwar meist durch Gehängeschutt überrollt und verdeckt. Doch lässt sich an dem Jägersteig vom Pflerschthal zum Obernberger See in der Grenzregion beobachten, dass der quarzitische Glimmerschiefer in St. 12 mit 15° nach N. einschiesst. In einem Steinbruche

1) Vergl. Diener, Der Gebirgsbau der Westalpen 1891, insbesondere S. 11 und 196.



unterhalb dieser Stelle wurde die gleiche Lagerung angetroffen, welche als die durchschnittlich in dem Schiefer unterhalb des Kalkkeils herrschende anzunehmen sein dürfte. Die Grenzfläche der Schieferbasis gegen die kalkigen Schichten senkt sich von dem Westfuss des Tribulaun bei dem Pflerscher Tinkel und Goldkappel gegen Schellenberg oberhalb Gossensass allmälig um etwa 1000 m und schneidet die Schichtenköpfe der krystallinischen Schiefer quer ab. Diese bestehen vorherrschend aus quarzigem Glimmerschiefer, welcher bei Stein Uebergänge in Gneiss zeigt und von Hornblende-führenden Zwischenschichten begleitet wird. Gegen Gossensass hin tritt an die Stelle des Glimmerschiefers Phyllit, der abwärts gegen Sterzing und aufwärts gegen den Brennersattel anhält. Da wo der Steig von Bühel im Pflerschthal über das steile Gehänge zum Obernberger-Thal hinüberführt, dringt der krystallinische Schiefer tief in den Kalkkeil ein und verbindet sich wahrscheinlich mit dem Schiefer des Grubjochs. Es schneidet hier deutlich eine von NO. nach SW. verlaufende grosse Verwerfung durch. Ueber dem in SO.-Richtung rasch an Mächtigkeit abnehmenden Kalkkeil breitet sich auf der ganzen Längenerstreckung von der Nähe der Wildgruben-Alp an bis gegen die Brennerstrasse hin wieder krystallinischer Schiefer aus, so dass die jüngeren Kalkschichten zwischen dem liegenden krystallinischen Schiefer des Pflerschthales und dem hangenden des Höhenzugs (Rothspitz, Geierkragen, hoher Lorenzenberg u. s. w.), welcher nordwärts zum Obernberger Thal abfällt, eingeschlossen sind. Die Schichten des Kalkkeils werden demnach oben von überschobenem krystallinischem Schiefer überdeckt und nach O. zu endlich ganz abgeschnitten. Der starke Contrast zwischen der weissen Farbe des Kalks und Dolomits und der dunklen der Schiefer gestattet leicht, diese Auflagerung schon aus der Ferne mit den Augen zu verfolgen, schwierig dagegen ist es, theils wegen der Steilheit der Felswände, theils wegen Ueberdeckung mit

Gesteinsschutt, an solche Stellen zu gelangen, an welchen man die Contaktverhältnisse unmittelbar beobachten kann. Einen solchen leicht zugänglichen Punkt fand ich an dem von Giggelberg zum Sandjöchel hinaufführenden Alpweg, wo dieser aus dem Walde kommend die Weidfläche berührt und die hier entspringende Quelle zu einer Brunnenleitung gefasst ist. Auf eine Entfernung von wenigen Metern steht gegen unten der stark zerklüftete nahezu horizontal gelagerte Dolomit an, während nach der Höhe zu chloritischer Quarzitschiefer und Phyllit mit schwach nach NO. gerichteter Neigung ausstreicht. Dieses Verhältniss lässt sich nicht anders auffassen, als dass der Dolomit hier von dem überschobenen Schiefer schief abgeschnitten und überlagert wird, ähnlich wie ich dies auch an den Kalkkeilen in der Nähe der Angstalpe unter dem Gstellihorn gesehen habe. Es darf daher mit Recht diese Abzweigung vom Tribulaunstock gegen den Brenner hin als ein Kalk- und Dolomit-Keil zwischen krystallinischen Schieferschichten bezeichnet werden.

Die Schichten dieses Keils bestehen einförmig, wie früher nachgewiesen ist, vorherrschend aus Dolomiten und dolomitischen Kalken ohne erkennbare organische Einschlüsse, soweit wenigstens meine Beobachtungen reichen. Schichten, welche ganz unzweideutig als zu der Werfener Triasstufe oder zum Perm gehörig zu erkennen wären, lassen sich hier nicht wahrnehmen. Doch ist es mehr als wahrscheinlich, dass die unmittelbar dem krystallinischen Schiefer aufgelagerten, zwischen diesem und den mächtigen Kalkstöcken ausgebreiteten, allerdings nur wenig mächtigen Zwischenschichten, welche schon anfänglich in ihrer jetzigen Beschaffenheit auf den die Unterlage bildenden krystallinischen Schiefern abgesetzt und nicht erst in Folge von Dislokationen sekundär in ihre jetzige Stellung gebracht worden sind, die der Ablagerung der Kalk- (Dolomit-) Bildungen zunächst vorausgehenden älteren Perm- und Triasschichten darstellen.

An dem gewaltigen Kalkstock des Tribulaun's sind es die schon früher erwähnten knolligen, Chlorit- und Glimmer-führenden dünn- und uneben geschichteten Lagen, welche die Basis der hohen Sel-Wände und am Goldkappel-Sattel die tiefste Region der jüngeren Triasbildung ausmachen. Aehnlich dürfte es sich an der prachtvollen Felsenpyramide der Weisswandspitz verhalten, welche gleichsam als eine südliche Fortsetzung der Tribulaungruppe mit ihrem schöngeformten, weissen Kalkkegel deutlich auf dem dunkelfarbigen Schiefergestein über einem selbst aus der Ferne leicht kenntlichen terrassenförmigen Absatz aufgesetzt ist. Die gleichen Gesteine bringen auch die Gewässer des Keggrabens und Steinbachs bei Inner-Pflersch und bei Stein von der Höhe herab. Neben den weit vorherrschenden weissen Dolomitstücken finden sich hier auch häufig jene flasrig-knolligen, gelbverwitterten, kalkigen und dolomitischen Gesteine, welche, innig mit sericitischen Flasern verwachsen, unzweideutig an die tiefsten, den krystallinischen Schiefern direkt aufgelagerten Schichten am Marltpass, des Ortlerstocks, der Kalkberge im Unterengadin und am Fusse der Radstädter Tauern, überhaupt an gewisse Casannaschiefer erinnern. Dazu kommen intensiv schwarze schiefrige Kalkplatten mit glimmerähnlich glänzenden Schichtflächen, schwarze weisspunktirte Kalke und streifig gebänderte Kalke ähnlich, wie sich solche auch in den tiefsten Lagen am Ortler und in den diesem benachbarten Kalkbergen vorfinden. Diese Uebereinstimmung in der Gesteinsbeschaffenheit ist eine überraschende und deutet auf eine analoge Ausbildung aller der in dem mittleren Gebiete der Alpen entwickelten Triasschichten, welche man wohl als eine zusammengehörige innere Kalkzone der Alpen zusammenfassen darf.

Ueber die Aufeinanderfolge dieser verschiedenen Gesteine fand ich weiteren Aufschluss im hintersten Theil des Obernberger Thals, da wo dasselbe bei dem Waldbauer in zwei

Seitenthäler sich gabelt, und die Kalkschichten[1]) bis in die Thalsohle herabreichen. Am nördlichen Rand des nach W. abzweigenden Thalastes ganz in der Nähe der Waldbauer-Häuser sind an einem gegen die Wildgrube emporziehenden Alpsteige die auf dem krystallinischen Schiefer gelagerten kalkigen Schichten aufgeschlossen. Sie bestehen aus gelblich weissen mit Hornstein und sericitischen Substanzen durchwachsenen Kalken, ähnlich den erwähnten Gesteinsstücken von Inner-Pflersch und den von Kilian[2]) erwähnten Gesteinsbildungen in den Savoyer Alpen. Grüne Anflüge von Malachit, welche leicht in die Augen fallen, verrathen hier das Vorkommen von Kupfererzen. Als permische Schichten sicher erkennbare Gesteine werden auch hier vermisst; aber das Vorkommen von Kupfererzen erinnert doch sehr an den in seiner geologischen Stellung problematischen Schwazer Kalk des Innthales. Der Steig führt dann höher ganz in das Gebiet der krystallinischen Schiefer, während thalaufwärts von dem steilen Gehänge herabgebrochene graue, schwarze und gebänderte Kalke oder Dolomite das Anstehen der zunächst höher folgenden Schichten wie im inneren Pflerschthale verrathen, bis im innersten Thalkessel fast nur mehr weisse dolomitische Kalke oder Dolomite zu finden sind. In dem nach S. ziehenden Thalzweig gegen den hinteren See ist die hier durchstreichende Grenze zwischen Schiefer und Kalk durch Gehängeschutt überrollt.

Die Bleibergwerke im Pflerschthale.

Als eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit der Glimmerschiefer-artigen Gesteine an der Basis des Kalkkeils im

---

1) Es sei nochmals daran erinnert, dass hier unter Kalkschichten immer die zusammengehörigen Complexe von Kalk und Dolomit zu verstehen sind.

2) Bull. d. e. soc. d. France 3. Ser. t. XIX p, 589.

Pflerschthal verdient das Vorkommen von **Bleierzen** erwähnt zu werden.

Gossensass war in alter Zeit der Hauptsitz eines lebhaften Bergbaubetriebs.[1]) Noch jetzt bezeichnet ein buntgemaltes Bergmannswappen mit zwei Bergknappen und einem zwischen ihnen angebrachten grossen Bleiglanzblock über dem Eingang in das alte Berggerichtsgebäude (dem Gröbner'schen Gasthaus gegenüber) die Bedeutung, welche der Ort vormals in Bezug auf den Tiroler Bergbau[2]) besass. Zahlreiche Berghalden, verbrochene Stollen und Schächte auf beiden Seiten des Pflerschthales nächst Gossensass sind die Ueberreste eines unzweifelhaft grossen Betriebs, welcher als der älteste in Tirol bezeichnet wird. Es sollen einst 300 Bergknappen, die Schuhe mit silbernen Nägeln beschlagen, einen Aufzug im Dorf gehalten haben. In der That steht neben der Hauptkirche ein von den Bergleuten erbautes, der St. Barbara und dem St. Anton geweihtes Knappenkirchlein, dessen Altäre mit Schlägeln und Eisen sowie mit Erzstufen verziert sind. Ueber die näheren Verhältnisse dieses Bergbaues ist sehr wenig bekannt.

Nach einer Beschreibung von P. R. in v. Moll's Jahrbücher der Berg- und Hüttenkunde (Bd. II S. 140) waren um 1798 noch auf beiden Seiten des Pflerschthales zwar nicht mehr betriebene, aber doch noch fahrbare Berggebäude vorhanden. Dieselbe bezeichnet das Erzvorkommen auf der nördlichen Thalseite zunächst Gossensass im Thonschiefer als ein Lager, welches unter dem Namen Hauptgang bekannt sei, in St. 8—9 streichend unter 10° nach NO. einfalle. Der einbrechende Bleiglanz sei grob- und kleinblätterig, von geringem Silbergehalte, zuweilen mit Schwefelkies-Spuren

1) Urkundlich wurde 1479 der Bergbau auf dem Schneeberg dem Berggericht zu Gossensass untergeordnet.

2) Jos. v. Sperges, Tyrolische Bergwerksgeschichte, Wien 1765 S. 60.

verwachsen, von geringer Mächtigkeit, in einem Lager von Thon eingebettet und darin oft nur in Mugeln und Nieren enthalten. Das Erzlager wurde noch bis 50 Klafter unter der Erbstollensohle verfolgt und das Wasser aus dieser Tiefe durch ein Kreuzgestänge gehoben. Die Erze gelangten zur Verhüttung nach Brixlegg im Innthale. Auf der südlichen Seite des Thales war am Breitenberg unter der Schleyerwand das beträchtlich grössere Bergwerk Reifenstuhl angelegt. Die Gebirgsart, in welcher dieselben Erze aufsetzen, ist gleichfalls Thonschiefer mit ziemlich häufigen Lettenklüften. Im Uebrigen verhält sich das sehr unregelmässige Erzlager, welches nicht tief in das Gebirge fortsetzen, sondern meistens nur nach dem Taggehänge sich ausgedehnt haben soll, wie das der nördlichen Thalseite.

Nach einer anderen Nachricht wurden 1691 die Erze aus dem Pflerschthale zur Schmelzhütte Gressstein bei Sterzing geliefert.

Dieser Bergbau war bereits gegen Ende des 18. Jahrhunderts in Verfall gerathen und wurde 1818 ganz auflässig. In neuester Zeit galt ein nur schwacher Versuch der Wiedererhebung dieser alten Berggebäude, wurde aber nach kurzem Bestande wieder aufgegeben. Nach den jetzt noch auf den verschiedenen Halden aufgefundenen Gesteinen und Erzresten ist das Vorkommen im Pflerschthal jenem vom benachbarten Schneeberg gleichzustellen. Das Haupterz war zweifelsohne Bleiglanz, obwohl auf den alten Halden nur spärliche Spuren dieses Minerals anzutreffen sind. Doch dürfte der in dem erwähnten Bergmannswappen eingemauerte, 0,15 m hohe und 0,20 m breite Bleiglanzblock aus den alten Pflerschgruben stammen. Ein davon abgeschlagenes Stück besteht aus grossblättrigem Bleiglanz, begleitet von kleinen Eisenkies- und Zinkblendetheilen und verwachsen mit Granatführenden Glimmerschuppen. Eine von Ass. Ad. Schwager vorgenommene Analyse ergab als seine Zusammensetzung:

Blei	62.78
Eisen	6,46
Zink	5,29
Kupfer	0,84
Mangan	0,39
Silber	0,05
Antimon	0,04
Schwefel	16,66
Kalkerde	0,35
Bittererde	0,86
SiO_2 und A_2O_3	4,60
Kali	0,12
Natron	0,11
Unzersetzter Rest	1,41
	99,96

Es entspricht dies einem Gehalt von 72,5% Bleiglanz. Auffallend gering ist der Silbergehalt, während der Bleiglanz vom benachbarten Schneeberg 60% Blei und nahezu 0,07% Silber enthalten soll. Das Zink stammt aus der Beimengung von Zinkblende, Eisen theils von Schwefelkies, theils von einem Eisencarbonat (Ankerit); Kupfer und Antimon deuten auf eine feine Einsprengung von Kupferkies oder Fahlerz. Im Allgemeinen ist die Mineralvergesellschaftung unverkennbar jener der Schneeberglagerstätte ähnlich oder gleich. Dies wird auch durch die Beschaffenheit der auf den alten Berghalden vorfindlichen Gesteine bestätigt. Es fehlen hier alle Mineralien, welche sonst auf Mineralgängen als miteinbrechende Gangarten vorzukommen pflegen, wie Gangquarz, Kalkspath, Flussspath, Schwerspath u. s. w. Dagegen sind eisenreiche Spathe — Ankerit in Uebergängen zu Spatheisenstein —, welche meist, wenigsters äusserlich in Brauneisenerz umgewandelt sich zeigen, innigst verwachsen mit Titaneisen, Magneteisen und einer Graphit-ähnlichen Substanz, sehr häufig und zwar nicht in Form von Adern oder

Schnürchen ausgeschieden, sondern mit den Gemengtheilen des Granat-reichen Glimmerschiefers innigst verflasert oder linsenförmig eingelagert. Dieses Verhalten weist unzweideutig auf ein Vorkommen der gesammten Erzbildung in Form einer Fahlband-artigen Einlagerung im Glimmerschiefer.

Da die Alten bei dem Betrieb der Bergwerke im Pflerschthale zweifelsohne nur den Bleiglanz behufs der Darstellung von Silber gewonnen haben, die miteinbrechende Zinkblende dagegen zurückgelassen haben, so ist zu vermuthen, dass in den Altungen dieser jetzt verfallenen Bergwerke noch grössere Mengen von Zinkerzen sich vorfinden. Auch die zahlreichen Sensen- und Waffenschmieden, welche jetzt noch in Gossensass selbst und unterhalb gegen Sterzing zu betrieben werden, und wahrscheinlich aus früheren Aufbereitungswerken hervorgegangen sind, deuten auf einen lebhaften Bergwerks- und Hüttenbetrieb, der seit uralter Zeit[1]) in diesem Thale sich angesiedelt hatte.

Die muthmaassliche Aehnlichkeit der Erzformation vom Pflerschthal mit jener vom Schneeberg gab Veranlassung, auch dieser berühmten Lagerstätte einen Besuch abzustatten, weil hier durch den jetzt noch fortdauernden Bergbaubetrieb nähere Aufschlüsse über die Natur der Lagerstätte zu erwarten waren.

Der Erzbergbau auf dem Schneeberg.

Der Bergbau auf dem Schneeberg im Hintergrunde des Ridnauer Thals auf den schneeigen Höhen von über 2200 m zwischen diesem und dem Passeier Thal auf der Abdachung zu letzterem gelegen, zählt gleichfalls zu den ältesten des Landes. Derselbe soll in der Mitte des 15. Jahrhunderts zur Zeit seiner grössten Blüthe 1000 Bergknappen beschäftigt

1) Die Sage leitet die Gründung von Gossensass von einer Colonie Wolf Dietrichs ab.

haben, nahm aber mit dem Vordringen in grössere Tiefe allmälig der Art ab, dass 1792 nur mehr 106 Knappen in Arbeit standen, die sich seit 1771 selbst ausschliesslich mit Auskutten der alten Halden beschäftigten. Bis dahin war nur der silberhaltige Bleiglanz Gegenstand der Gewinnung; die Zinkblende blieb in der Grube oder wurde über die Halde gestürzt. Erst 1871 nahm das k. k. Aerar den Bau energisch wieder auf und hat denselben bis jetzt mit Erfolg fortgeführt, wobei hauptsächlich die Zinkblende den Gegenstand der Gewinnung ausmacht.

Ueber die Natur der Schneeberger Lagerstätte besitzen wir aus neuerer Zeit mehrere Mittheilungen von bergmännischen Autoritäten. Oberberghauptmann C. v. Beust[1]) beschreibt dieselbe zuerst als eine ausgesprochen lagerförmige, weil sie sich conform mit dem Schiefergestein, dem Glimmerschiefer, erstreckt, nennt jedoch gegen Schluss seiner Schilderung dieselbe „einen Lagergang oder deutlicher ausgedrückt ein Pseudolager, dessen Ausfüllung das Resultat eines späteren Eindringens der dasselbe constituirenden Erzmassen sei". Das heisst doch wohl: die Erze kommen zwar thatsächlich auf einem Lagerzug vor, aber theoretisch sind sie wie auf Gängen entstanden. Für diese Annahme werden aber weiter keine Beweise beigebracht, als die Analogie mit anderen sog. Lagergängen. Balling[2]) wiederholt diese Ansicht, indem er anführt, dass die Erze parallel den Schichten des Glimmerschiefers eingelagert auf einem Lagergang — Pseudolager — vorkommen. Posepny[3]) zieht gleichfalls das lagerförmige Vorkommen nicht in Zweifel, glaubt aber dasselbe dadurch erklären zu können, dass er die Bildung der geschwefelten Erze von einer Art Pseudomorphosen-Process ableitet, bei welchem an die Stelle der anfänglich vorhandenen

1) Oesterreich. Zeitschrift f. Berg- u. Hüttenw. 1871. 201.
2) Daselbst Jahrg. 1872. S. 410.
3) Daselbst Jahrg. 1879. S. 106.

Gyps- und Anhydritbeimengungen die Schwefelmetalle getreten seien. Schmidt[1]) endlich spricht sich nicht näher über die Natur der Lagerstätte aus, bezeichnet sie jedoch als Gang. Da die Erze innigst verwachsen mit den Gemengtheilen des Granat-reichen Glimmerschiefers in linsenförmigen Zügen, Streifen und Flasern vorkommen, welche auf eine Länge von nahezu 2000 m und flache Tiefe von über 250 m unter gleichem Steigen und Fallen (mit 40° nach NW.) mit den Schieferschichten fortziehen, dabei weder eine Absonderung der Lagerstätte vom Nebengestein durch ein Salband oder Besteg wahrzunehmen ist, noch Gangarten in Begleitung der Erze auftreten, so kann ich nach meinen Beobachtungen und Auffassungen das Erzvorkommen am Schneeberg nur für ein Fahlband-artiges ursprüngliches Lager halten, dessen Entstehung mit der des dasselbe umschliessenden Glimmerschiefers nahe zusammenfällt.

Die Erze sind ähnlich wie im Pflerschthale vorherrschend Zinkblende und silberhaltiger Bleiglanz, der letztere mehr untergeordnet, auf die Ränder der Erzzüge, namentlich auf die hangenderen Lagerverzweigungen beschränkt und gegen die Tiefe zu sich verringernd. Als seltenere Begleitmineralien finden sich Schwefel-, Arsen- und Kupferkies, dann Magneteisen, Ankerit, Spatheisenstein, Gyps, Anhydrit und der sehr seltene Schneebergit (Antimon-Kalkmineral) u. A. Bemerkenswerth ist, dass das 4—5 m mächtige Haupterzlager zuweilen auf 3—5 Streifen oder Aeste[2]) sich verzweigt, welche durch erzleere Gesteinszwischenschichten geschieden sind, streckenweise sich vereinigen und streckenweise sich wieder vergabeln. Zuweilen sind die Erzmittel auch linsenförmig ausgebildet. Mehrere quer streichende Klüfte

1) Oesterreich. Zeitschrift f. Berg- u. Hüttenw. 1883. 94.

2) In rohem Hauwerk durchschnittlich 28 ½ % Zinkblende und 1½ % Bleiglanz.

3) Oesterreich. Zeitschrift f. Berg- u. Hüttenw. 1879. 100.



oft mit Lettenausfüllung, auf welchen die meisten der überaus zahlreichen Stollen querschlägig auf die Lagerstätte getrieben waren, verwerfen das Lager treppenförmig in NO.-Richtung, wodurch nach Posepny[1]) eine Art Adelvorschub nach W. sich ergiebt. Bis Ende des 18. Jahrhunderts blieb das Vorkommen von Zinkblende unbeachtet. In dem älteren Bericht aus dem Jahre 1798[2]) wird dieses weitaus vorherrschende Erz nicht einmal dem Namen nach erwähnt und erst 1799 führt Senger[3]) an, dass man auch die Zinkblende zu benützen angefangen habe. Alle diese Verhältnisse, welche an der Schneeberger Erzlagerstätte zu beobachten sind, bestätigen die Analogie dieses Erzvorkommens mit dem im Pflerschthal bei Gossensass.[4])

Entstehung der Brennerbad-Quelle.

In welcher Beziehung stehen nun diese geologischen Verhältnisse, welche wir in der Umgegend des Brenners kennen gelernt haben, mit der Therme des Brennerbades?

Man wird ohne nähere Prüfung der Gebirgsverhältnisse wohl geneigt sein, dieses Auftreten mit der Entstehung des Brennerpasses selbst in unmittelbare Beziehung zu bringen. Bestärkt wird man in dieser Annahme, wenn wir den Blick auf eine geologische Uebersichtskarte, wie z. B. auf die vorzügliche geologische Karte v. Hauer's werfen und wahr-

1) Die Bezeichnung „Trümmer" scheint mir für derartige Abzweigungen nicht geeignet.

2) v. Moll's Jahrbücher d. Berg- u. Hüttenkunde 1798. II. S. 147.

3) Beschreibung einer Wanderung nach dem Schneeberg. Daselbst. IV. S. 156.

4) Ob der in der Nähe des Schneebergs an der sog. Seespitz dem Glimmerschiefer anfgelagerte, weisse Kalk analog jenem am Tribulaun und im Pflerschkeil den Triasbildungen zuzurechnen sei, wie es wahrscheinlich ist, muss ich unentschieden lassen, da es mir nicht geglückt ist, Gesteine dieses Vorkommens zu sammeln und zu untersuchen.

nehmen, dass eine der merkwürdigsten und durch die Begrenzung verschiedenen Gesteinsbildungen auf leicht kenntliche Weise bezeichnete Dislokationslinie, die sog. Judicarienspalte, in ihrer Verlängerung nach NO.-Richtung hin ungefähr mit der Einsattelung des Brenners zusammentrifft. Es hat auch bereits Prof. Penck, dem wir eine eingehende Schilderung[1]) der merkwürdigen, tiefsten Quereinbuchtung durch die Centralalpen am Brenner verdanken, darauf hingewiesen. Es wird hier die Entstehung der Brennereinsattelung auf eine grossartige Einsenkung der Gebirgstheile westlich vom Pass in der Richtung des Judicarien-Bruchs zurückgeführt, wobei allerdings noch weiter angenommen wird, dass die ursprünglichen Abbruchsränder durch nachträgliche Wirkungen namentlich von Flüssen und Gletschern sehr vielfach und bedeutend verändert worden sind. Penck beruft sich zur Begründung dieser Annahme unter Anderem auf die ungleiche Meereshöhe, in welcher die jüngeren Kalkschichten dieser Gegend auf dem älteren Schiefergebirge aufgesetzt sind, auf das Fehlen von Strandconglomeraten oder sandigen Schichten an der Basis dieser Kalke, welche nach seiner Ansicht doch vorhanden sein müssten, wenn die Kalke südlich von Innsbruck schon während der Triasperiode in einem schmalen, die Centralalpen kreuzenden Meeresarm abgelagert worden wären. Auch die Verschiedenheit in der Beschaffenheit der die Triasschichten unterlagernden Schieferbildungen zur rechten und linken Seite des Sillthales soll in gleichem Sinn zu deuten sein.

Ist die Annahme eines ursächlichen Zusammenhangs der Brennerpassbildung und des Judicarienbruchs richtig, so müssen sich Spuren der Fortsetzung des letzteren nicht bloss am Brenner selbst, sondern auch in dem Gebirgstheile zwischen diesem und dem Punkte, an welchem die Judicarienspalte in

1) Zeitschrift des Deutsch. u. Oesterr. Alpenvereins Jahrg. 1887 Bd. XVIII S. 7.

ihrem Verlauf nach NO. noch unzweideutig sich bemerkbar macht, nämlich in der Gegend von Meran, erkennen lassen. Doch schon in diesem südlichen Gebiete beginnt vom Ultenthal bei St. Pangraz an in Folge des Hertretens der Granitmassive vom Bannwald und Aichberg eine gewisse Unsicherheit bezüglich der NO.-Fortsetzung des Judicarienbruchs und bei Meran selbst wird derselbe vollends von der hier quer ziehenden grossen Etschthalspalte durchkreuzt. Zwar könnte man die tiefe Neifschlucht im Norden des Etschthales als eine solche Fortsetzung ansehen. In diesem Falle wäre aber die Richtung bereits bedeutend östlich abgelenkt. E. Suess in seinem klassischen Werke „Das Antlitz der Erde"[1]) nimmt dies an und führt unter Bezug auf die Forschungen von Fuchs und Teller wörtlich aus: „Der Judicarienbruch lässt sich durch die Neifschlucht bis Weissenbach im Penserthal verfolgen; hier wendet sich seine Richtung aus NO. mehr und mehr nach O. u. s. w. Das merkwürdigste Ergebniss aus Teller's Untersuchungen ist jedoch der Nachweis der Fortsetzung des Granitstocks bis weit gegen O. hin" u. s. w. Nach dieser Ansicht wäre die Bruchlinie zunächst N. von Meran bereits so weit östlich abgelenkt, dass sie mit dem Brennerpass nicht mehr in Beziehung gebracht werden könnte.

Nimmt man aber an, dass die durch die Neifschlucht zum Penserthal streichende Richtungslinie vielleicht nur einem sich abzweigenden Seitenbruch entspräche und dass das von Meran bis St. Leonhard auffallend gradlinig verlaufende Passeier Thal die wahre Fortsetzung des Hauptbruchs darstellt, so müssten sich in letzterem entsprechende Anzeichen von Gebirgsverschiebungen auffinden lassen. Wir bemerken aber, dass auf dieser Thalstrecke die Schichtenzüge verschiedener Schieferbildungen ohne irgend eine Aenderung ihrer Streichrichtung von einer Thalseite zur andern hinübersetzen.

---

1) Bd. I. S. 321 u. 322.

Ausserdem ist die Richtung dieser Strecke des Passeier Thales so viel weiter gegen NW. gewendet, dass eine Verlängerung derselben weit ab von der Einsattelung des Brenners treffen würde. Lassen sich in diesen südlichen Gebirgstheilen demnach keine deutlichen Spuren des nach dem Brenner fortsetzenden Judicarienbruchs erkennen, so könnten diese hier wohl verwischt sein, aber nordwärts in der Brennergegend wieder zum Vorschein kommen. Meine in dieser Richtung unternommenen Nachforschungen in der Nähe des Brennerpasses waren aber erfolglos.

Zwischen Sterzing und Gossensass setzen die phyllitischen und quarzitischen Schiefer, nur durch die Thalfurche und jüngeren Anschwemmungsablagerungen unterbrochen, beiderseitig gleichmässig fort. An mehreren Stellen ist deutlich zu erkennen, dass festere Gesteinslagen Querriegel von einer Thalseite zur andern bilden, welche, jetzt von einer engen Flussrinne durchnagt, früher eine stufenartige Aufstauung der Gewässer bewirkt haben. An einer Stelle bei Ried liegen hinter einem solchen Felsendamm mächtige zu Nagelflühartigen wohlgeschichteten Conglomeratbänken verfestigte Geröllmassen.

Auch zunächst unterhalb Gossensass streicht ein Felsrücken von quarzreichem Phyllit von Platz gegen Steckholz. Die Eisenbahn musste hier, um sich einen geeigneten Durchzug zu verschaffen, die tiefe Schlucht des Eisackbetts selbst benützen und dieses durch einen in Fels gegrabenen Tunnel seitlich ableiten. Von dieser Felsbarre, nicht von einer Moräne rührt die Wasseranstauung her, welcher das schöne verebnete Becken von Gossensass seine Entstehung verdankt. Der Schutt, mit welchem diese Thalebene ausgefüllt wurde, ist kein glacialer. Ich fand in diesem Geröll der ersten Terrasse über der jetzigen Thalfläche, auf welcher grossentheils das Dorf Gossensass steht, in einer Schottergrube bei dem Brauhaus keine gekritzten oder wirr gelagerten Geschiebe.

Während das Hauptthal dem Pflerschbach folgt, durchbricht der Eisack in einer felsigen Schlucht einen zweiten oberen Felsriegel, auf dem die Kirche des Dorfes steht und durch den die Strasse nach dem Brennerpass neben der Eisack und einer hohen Felswand geführt ist. Auch hier habe ich keinen Moränenwall gesehen. Ueberall streichen die Phyllitschichten gleichartig quer durch die Thalvertiefung hindurch. Gleich oberhalb legt sich ein Kalklager im Phyllit an, in dem ein Steinbruch angesetzt ist. Dann folgen in dem Eisackthal bis zum Brennerbad, in zahlreichen natürlichen und durch den Eisenbahnbau geschaffenen Entblössungen sichtbar, Phyllitschichten mit Kalksteineinlagerungen, welche, abgesehen von örtlichen Biegungen, so ziemlich quer über das Theil streichen. Ein Schichtenbruch oder -Verrückung in dieser Thalrichtung hat sich nicht nachweisen lassen.

Erst am Brennerbad selbst bemerkt man eine längsstreichende Schichtenknickung, die einerseits mit der oberen Abbruchsfläche des Pflerscher Kalkkeil in Beziehung tritt, andrerseits in der Nähe des Wolfendornbergs fortzieht. Diese Bruchlinie in Verbindung mit der weichen Beschaffenheit und leichten Zerstörbarkeit der Phyllitgesteine scheint zusammen bewirkt zu haben, dass die obersten Thalenden der Eisack und der Sill zusammenschneidend zu einer gleichsam gemeinsamen Thal-artigen Vertiefung sich verbunden haben, auf der erst später die beiden Wassergebiete sich abgegrenzt haben. Daraus erklärt sich der so auffallend Thal-ähnliche Charakter der breiten Brennerpass-Einsattelung.

Damit steht nun auch das Auftreten der Therme des Brennerbades nach zwei Richtungen hin im Zusammenhang. Einmal entspringt die Quelle auf dem Sattel in einem tiefen, ein Thal vertretenden Passeinschnitt, wie sonst die Mineralquellen in Thälern zu Tag zu treten pflegen. Der Brennerpass hat in Bezug auf die Therme die Bedeutung

eines breiten und tiefen Thales. Dann aber wird der Austrittspunkt der Quelle in zweiter Linie durch den erwähnten Schichtenbruch bedingt, welcher hier durch diese Vertiefung verläuft und dem Quellwasser den Weg anweist.

Ob das Hervorbrechen der in allen Beziehungen der Brennerbadquelle sehr ähnlichen oder gleichen Kaiserbrunnquelle im hintersten Tuxerthal bei einer Entfernung von nur 20 km durch die Fortsetzung derselben Schichtenknickung bedingt wird, wie wahrscheinlich ist, muss näheren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Was nun schliesslich die Temperatur der Brennertherme anbelangt, welche an sich keine hochgradige ist und wahrscheinlich durch Vermischung mit gewöhnlichem Quellwasser in Folge ungenügender Fassung noch herabgedrückt wird, so führt uns die Thatsache, dass das Wasser nicht mit grösserem Druck aus der Tiefe empordringt, sondern augenscheinlich von oben her sich beizieht, zu der Annahme, dass die Quelle ihre Wärme von den benachbarten höheren Bergen empfängt, in welchen Regen- oder Schmelzwasser auf Klüften und Spalten in das Innere des mächtigen Gebirgsstocks eindringt, daselbst von der dort herrschenden Erdwärme die erhöhte Temperatur empfängt und dann auf der erwähnten Spalte der tiefsten Stelle zufliesst, wo diese von der Erdoberfläche angeschnitten wird. Diese Stelle ist aber am Schnittpunkt der Schichtenbruchlinie mit der Brennereinsattelung, nämlich da, wo die Brennerbadquelle wirklich zum Vorschein kommt.

Auf diese geologischen Momente lässt sich nach meiner Auffassung Ursprungsort und Beschaffenheit der Therme des Brennerbades zurückführen.



Berichtigung.

Seite 91 Zeile 6 v. u.

statt $\Big[[A\,B]\,[C\,D]\,E\Big]$, $\Big[[A\,B]\,[C\,D]\,[E\,F]\Big]$ etc.

lies $\Big[\big[[A\,B]\,[C\,D]\big]\,E\Big]$, $\Big[\big[[A\,B]\,[C\,D]\big]\,[E\,F]\Big]$ etc.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 133. Stiftungstages

am 28. Mai 1892.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, leitet die Sitzung mit folgenden Worten ein:

Die kgl. Akademie der Wissenschaften feiert heute ihren 133. Stiftungstag. Am 28. März 1759 erliess der Wittelsbacher Max Josef, Churfürst von Bayern, einen offenen Brief, in welchem er die Gründung der churbayerischen Akademie der Wissenschaften beurkundete. Vorher bestand nur eine schon von seinem Vater Kaiser Karl VII. unterstützte gelehrte Privatgesellschaft unter dem Namen Parnassus boicus. Max Josef wollte der Wissenschaft freie Bahn zu ihrer Fortentwicklung schaffen. In der Urkunde sagt er: „Weil wir überdiess durch Abschaffung aller Hindernisse, die immer dem vorgesetzten Endzweck entgegenstehen könnten, die Ausbreitung nützlicher Wissenschaften und Künste, so viel an Uns ist, zu erleichtern, und deren Ansehen ehrwürdig zu machen gnädigst entschlossen sind, so nehmen wir die Akademie in Unseren churfürstlichen Schutz und wollen aus

besondern Gnaden derselben Protektor sein und heissen dergestalt, dass wir Niemanden über selbe eine Jurisdiktion gestatten, noch geschehen lassen wollen, dass von der akademischen Versammlung für genehm gehaltene Aufsätze einer anderweitigen Censur unterworfen werden."

Auch seine Nachfolger haben dieses Protectorat mit Weisheit und Wohlwollen aufrecht erhalten, und so schauen wir auch gegenwärtig vertrauensvoll und dankbar auf zu unserm Protektor Prinz-Regent Luitpold, des Königreichs Bayern allergnädigstem Verweser.

Es ist üblich, bei der jährlichen Wiederkehr des Stiftungsfestes der im vergangenen Jahre dahingeschiedenen Mitglieder zu gedenken und mit einer Festrede eines activen Mitgliedes, abwechselnd aus den drei Classen der Akademie, zu schliessen. Zuvor noch sei mir gestattet, mitzutheilen, was zwei mit der Akademie verbundene Stiftungen, den Zographosfonds und die Liebig-Stiftung betrifft.

Die kgl. Akademie der Wissenschaften hatte im Jahre 1889 zur Bewerbung um den von Hrn. Christakis Zographos gestifteten Preis zur Förderung des Studiums der griechischen Sprache und Literatur auf Vorschlag der philosophisch-philologischen Classe als Aufgabe gestellt: „Herausgabe des byzantinischen Meloden Romanos, mit einer die handschriftliche Ueberlieferung, die literarhistorische Stellung und die metrische Kunst des Dichters darlegenden Einleitung." — Rechtzeitig ist eine Bearbeitung derselben eingeliefert worden mit dem Motto aus Byrons Manfred:

„By the power which hath broken
The grave which enthrall'd thee,
Speak to him who has spoken
Or those who have call'd thee!"

Der Verfasser derselben hat für eine Ausgabe des Romanos

auserlesenes handschriftliches Material aus den verschiedensten Bibliotheken Europa's zusammengebracht und ist in diesem Theil der Arbeit sogar über das gesteckte Ziel hinausgegangen, als er die Bibliotheken nach Handschriften für die ältere Liturgie der griechischen Kirche überhaupt durchsuchte. Verarbeitet und für den kritischen Apparat der geplanten Ausgabe zurecht gelegt ist das Material noch nicht, aber derart durcharbeitet, dass nach dieser Seite hin die Lösung der gestellten Aufgabe keinen grossen Schwierigkeiten mehr begegnen wird. Auch zu den verlangten Prolegomena hat der Verfasser nur Vorarbeiten geliefert, die noch der Vertiefung und der abschliessenden Redaction bedürfen. Vollständig gelöst ist demnach die Aufgabe noch nicht; aber da die richtigen Grundlagen gewonnen sind und der gewünschte Abschluss wesentlich nur durch die Kürze der Zeit verhindert wurde, so erkennt die Akademie nach dem Antrag der philosophisch-philologischen Classe dem Verfasser dieser Arbeit den vollen ausgesetzten Preis von 2000 M. zu — unter der Voraussetzung, dass die vorbereitete Ausgabe des Textes nebst den Prolegomena nicht lange auf ihr Erscheinen warten lassen. Der Name des Verfassers ist Dr. Karl Krumbacher.

Die Akademie stellt als neue Preisaufgabe, und zwar mit dem Einlieferungstermin bis spätestens am 31. December 1894:

„Polyglotte Ausgabe der Chronik von Morea auf Grund der in verschiedenen Sprachen und Recensionen erhaltenen Texte, nebst einer Untersuchung über das Verhältniss jener Texte zu einander und über das Original der Chronik.“

Die Bearbeitungen dürfen nur in deutscher, lateinischer oder griechischer Sprache geschrieben sein und müssen an Stelle des Namens des Verfassers ein Motto tragen, welches an der Aussenseite eines mitfolgenden, den Namen des Ver-

fassers enthaltenden versiegelten Couverts wiederkehrt. Der Preis für die gelöste Aufgabe beträgt 2000 M., wovon die eine Hälfte sofort nach der Zuerkennung, die andere Hälfte aber erst dann zahlbar ist, wenn der Verfasser für die Druckveröffentlichung seiner Arbeit genügende Sicherheit geboten hat.

Das Curatorium der Liebig-Stiftung hat auf Antrag des geheimen Rathes und Professors Dr. Julius Kühn, Director des landwirthschaftlichen Instituts an der Universität Halle und Mitglied des Curatoriums einstimmig beschlossen, unserm Collegen und Secretär der mathematisch-physikalischen Classe Dr. Carl v. Voit in Anerkennung für seine bahnbrechenden Forschungen über Stoffwechsel und Ernährung von Menschen und Thieren die höchste Auszeichnung, die goldene Liebig-Medaille zu verleihen, welche ihm in der Sitzung des Curatoriums vom 3. Februar 1892 überreicht wurde.

Der Präsident hat nun zunächst eines verstorbenen Ehrenmitgliedes zu gedenken:

Dom Pedro II. d'Alcantara, Kaiser von Brasilien.

Im November des verflossenen Jahres wählte unsere Akademie Dom Pedro II., Kaiser von Brasilien, zum Ehrenmitgliede. Er freute sich darüber nur kurz; einige Wochen später, am 5. December 1891 endigte der Tod das Leben dieses thätigen, vielgeprüften, aber auch vielgeliebten Fürsten, welchem nicht nur sein Land, sondern auch die wissenschaftliche Welt zu Dank verpflichtet ist.

Victor Hugo, der bekanntlich Potentaten nicht schmeichelte, verglich ihn mit Marcus Aurelius, dem besten Kaiser der alten Römer. Dom Pedro's Lebenslauf bietet des Interessanten viel, doch kann ich hier von meinem akademischen Standpunkte aus nur wenig erwähnen. Das Ganze bleibt besser Geschichtschreibern und Politikern überlassen.

Er war geboren zu Rio de Janeiro am 2. December 1825, bestieg am 7. April 1831 noch nicht ganz sechs Jahre alt unter einer Regentschaft den Thron von Brasilien und wurde im Jahre 1840 im Alter von fünfzehn Jahren als volljährig erklärt. Während seiner Regierung, welche sich über ein halbes Jahrhundert erstreckte, hatte er nicht nur Aufstände niederzuwerfen und Kriege zu führen, sondern auch sein grosses Reich und dessen Verwaltung zu organisiren. Daneben fand er immer noch Zeit, sich in den verschiedensten Wissenschaften gründlich zu unterrichten. In den Sprachwissenschaften war er ganz ungewöhnlich bewandert und konnte hierin als gelehrter Fachmann angesehen werden. Er sammelte und übersetzte die hebräischen Kirchenlieder der provençalischen Juden, erforschte die Tupisprache seiner Indianer und liess ein Lexikon dafür ausarbeiten.

Ebenso interessirte er sich für alle Naturwissenschaften. Charles Darwin schrieb im Jahre 1887 an den Botaniker Sir Josef Hooker: „Der Kaiser hat so viel für die Wissenschaft gethan, dass jeder Gelehrte ihm die grösste Hochachtung schuldig ist.“

Als er auf einer Reise aus der neuen in die alte Welt nach München kam und unsre wissenschaftlichen Anstalten besuchte, setzte er auch da durch seine Specialkenntnisse die Fachleute in Erstaunen.

Während seiner Regierung entstanden in ganz Brasilien zahlreiche Schulen, wurde das historische und geographische Institut in Rio de Janeiro, die polytechnische Schule, das Collegium Dom Pedro II., das Observatorium für Astronomie und Meteorologie und Anderes mehr errichtet. Die Universität suchte er ganz nach Muster der besten europäischen Universitäten zu gestalten.

Diese wissenschaftlichen und humanitären Bestrebungen des Monarchen wurden auch in Europa allseitig anerkannt. Er war seit 1874 Mitglied des Instituts von Frankreich, wo

er noch einige Tage vor seinem Tode zu Paris einer Sitzung in Mitte der 40 Unsterblichen beiwohnte. Ferner war er Mitglied der Royal Society in London, der Akademien der Wissenschaften in St. Petersburg, Moskau, Florenz, Berlin und München.

In gleichem Maasse interessirte sich der Kaiser für Fortschritte in Künsten und Gewerben. Es ist bezeichnend für seine Natur, dass er schon im Jahre 1857 dem damals in der alten Welt noch viel verkannten Richard Wagner den Vorschlag machte, für das lyrische Theater in Rio de Janeiro eine Oper zu componiren.

Eisenbahnen und Telegraphen, Schiffahrt, Handel und Ackerbau suchte er in jeder Beziehung zu fördern.

Für seine Person ein gläubiger katholischer Christ, achtete und förderte er auch Andersgläubige und verkehrte freundschaftlich mit Protestanten, Juden und Mohammedanern. In Avignon erscheint eine unter den Israeliten Frankreichs verbreitete Monatsschrift „La famille de Jacob", in welcher im Decemberheft 1891 in einem Artikel über den Tod Dom Pedro II. wörtlich steht: „Er liebte nicht bloss unsere heilige Sprache, er liebte uns selbst; er achtete die Tugenden unserer Race, welche er gegen die gehässigen Angriffe des modernen Antisemitismus vertheidigte, der ihn empörte."

Seine Regierung war eine durchaus liberale, auf constitutionell-monarchischer Grundlage. Für jeden seiner Unterthanen war er zugänglich und wohlwollend.

Da muss man sich fragen, wie ein solcher Monarch plötzlich entthront und des Landes verwiesen werden konnte!

Am 15. November 1889 brach in der Hauptstadt Rio de Janeiro unter Führung des Marschalls Fonseca eine Militärrevolution aus. Anstatt des Kaisers begann ein Dictator zu herrschen. Dom Pedro erklärte, dass er mit keinem Tropfen Blut seiner geliebten Unterthanen die Herrschaft dem Usurpator entreissen wolle. Widerstandslos begab er sich

auf ein Schiff, das unter kaiserlicher Flagge fuhr und in Lissabon, der Heimath seiner Ahnen landete. Seitdem lebte er im Exil in Europa, öfter äussernd: „Wenn sie mich brauchen, kehre ich zurück.“ Fonseca vergoss hintennach allerdings viel brasilianisches Blut, um sich an der Spitze der Regierung, welche man Republik nannte, zu behaupten; — aber umsonst. Dom Pedro erlebte es noch, dass Fonseca wieder gestürzt und die Gewalt einem anderen Parteimanne übertragen wurde. Wie lange das grosse Reich unter solchen Wechselfällen noch leiden wird, ist abzuwarten.

Politiker sind der Ansicht, dass die Militärrevolution in der Stadt Rio fast nur möglich war, weil Dom Pedro ein viel zu milder Friedensfürst und in seinen humanitären Bestrebungen der Culturentwicklung Brasiliens zu sehr vorausgeeilt war. Die Sklavenemancipation, seine schönste Regierungsthat, entfremdete ihm die Sympathien eines grossen Theils der besitzenden, einflussreichen und mächtigen Classen.

Schon 1850, als er einen Negeraufstand beruhigt hatte, verbot er den Sklavenhandel und neue Einfuhr von Sklaven, womit die Aufhebung der Sklaverei vorbereitet wurde. Es gab ja grosse Districte in Brasilien, welche viel mehr Sklaven als Freie zählten. Im Jahre 1871 setzte er im Parlament ein Decret durch, welches das allmähliche Verschwinden des Sklaventhums bewirkte, und 1888 wurde die Sklaverei in Brasilien als erloschen erklärt.

Wie Sokrates für und wegen seiner Philosophie den Giftbecher trinken musste, so musste Dom Pedro, der von englischen und französischen Schriftstellern oft Kaiser-Philosoph genannt wird, für seine Humanität Scepter und Krone niederlegen. Er that es auch mit philosophischer Ruhe und schloss auf seinem Sterbebette in Paris in sein letztes Gebet noch sein geliebtes Brasilien ein, für das er um eine glückliche Zukunft flehte.

Auch unsre Akademie der Wissenschaften wird Dom Pedro d'Alcantara stets bewundern und ihm ein dankbares Angedenken bewahren.

Der Classensecretär Herr C. v. Voit gedachte sodann der seit dem vorigen Stiftungstage gestorbenen Mitglieder der mathematisch-physikalischen Classe.

Die Classe hat in dem verflossenen Jahre die ungewöhnlich grosse Anzahl von elf Mitgliedern durch den Tod verloren, darunter solche, welche die Wissenschaft in neue, vorher nicht betretene Bahnen gelenkt haben und zu den ersten Meistern in ihrem Fache zählten.

Zu diesen gehörte das am 10. Mai 1891 im 74. Lebensjahre dahier gestorbene ordentliche Mitglied der Classe, Carl Wilhelm von Nägeli, welcher allgemein als der vielseitigste und geistreichste unter den Botanikern der neueren Zeit galt. Er war ausgerüstet mit den umfassendsten Kenntnissen in der Morphologie und Physiologie der Pflanzen, aber auch in der Physik und Chemie; zugleich war er ein ungemein scharfer Beobachter und folgerichtiger Denker. Namentlich in den letzten Jahren seines Lebens hat er sich noch den schwierigsten Problemen seiner Wissenschaft zugewandt und mit philosophischem Geiste das Beobachtete bis in die letzten Consequenzen durchzudenken geliebt.

Ich hebe nur einige seiner hauptsächlichsten Arbeiten hervor, um dem Nichtfachmann ein annäherndes Bild seiner Thätigkeit zu geben.

Zunächst erwähne ich seine ausgedehnten Beobachtungen über die Zellenbildung und das Zellenwachsthum in den pflanzlichen Organismen; dann die grosse Monographie über die Stärkekörner, in welcher er die Lehre von dem Wachsthum durch Intussusception entwickelte und bis zu dem molekularen Aufbau dieser Gebilde vorzudringen wagte;

ferner seine Bearbeitung der Frage der Varietäten- und Bastardbildung; die Systemattk der Hieracien; die Untersuchungen über das Leben der niederen Pilze, bei denen er zwar irrthümlich keine feste Speciesabgrenzung, sondern nur allmähliche Uebergänge annahm, jedoch zuerst die Wirknngen dieser kleinsten Organismen auf die Gewebe als Krankheitserreger und Ursachen der das Menschengeschlecht verheerenden Infektionskrankheiten näher erörterte; seine molekülarphysikalische Theorie der Gährung als Beitrag zur Erklärung der Ursachen der mannigfaltigen Zersetzungsvorgänge in den Zellen; sein Eingreifen in die Darwin'sche Lehre von der Entstehung der Arten durch die natürliche Zuchtwahl nnd den Kampf um's Dasein durch seine mechanisch-physiologische Theorie der Abstammungslehre, in der er die Zuchtwahl nur unzweckmässig gewordene Formen verdrängen, aber nicht neue Formen bilden lässt, dagegen als mechanische Ursache die Anpassung und Vervollkommnung aufstellt und sich zugleich Vorstellungen über den Aufbau des wesentlichen Trägers der erblichen Eigenschaften der Organisation, des sogenannten Idioplasmas, sowie über die Anordnung der in demselben enthaltenen Elementartheile, der Micellen, bildet; endlich seine bei der hiesigen Naturforscherversammlung im Jahre 1877 gehaltene geistvolle Rede über die Schranken der naturwissenschaftlichen Erkenntniss, worin er dem Ignoramus und Ignorabimus des grossen Physiologen für alle endlichen Erscheinnngen, soferne sie in das Bereich der sinnlichen Wahrnehmung fallen, seinen tröstlicheren Ausspruch: „wir wissen und wir werden wissen" entgegenstellte.

Alle diese Arbeiten Nägeli's sind ebensoviele Marksteine der botanischen Wissenschaft geworden. Wenn er dabei auch, in felsenfestem Vertrauen auf die Schärfe seines Denkens, in seinen weitgeführten logischen Schlüssen hie und da geirrt hat, weil es bei den so unendlich complicirten Lebenserscheinungen unmöglich ist, alle die mannigfaltigen dabei

mitwirkenden Ursachen zu überblicken, so haben seine Ideen doch in hohem Grade anregend und befruchtend gewirkt.

Ich habe heute an dieser Stelle nur dem gerechten Stolze Ausdruck zu verleihen, dass ein so bedeutender Forscher so lange Zeit unserem Kreise angehörte, und zu beklagen, dass er uns entrissen wurde; von sachkundiger Seite werden Nägeli's Verdienste um die Wissenschaft in einer besonderen Denkrede eingehende Würdigung erfahren.

Von auswärtigen und correspondirenden Mitgliedern der Classe sind folgende gestorben:

Das auf den Vorschlag von J. Liebig gewählte correspondirende Mitglied Don Ramon Torres Munoz de Luna, Professor der Chemie an der Universität zu Madrid, ist am 10. November 1890 in Malaga aus dem Leben geschieden. Luna war längere Zeit einer der thätigsten und wirksamsten Chemiker Spaniens; er hat namentlich durch die Entdeckung ausgedehnter Phosphoritlager bei Cocierés in Estramadura, dann durch seine Arbeit über den Einfluss der phosphorsauren Erden auf die Vegetation und deren Anwendung zur Erhöhung der Getreideproduktion, sowie durch seine Schrift über die Zukunft der Agrikultur in Spanien einen sehr nützlichen Einfluss auf den Feldbau der pyrenäischen Halbinsel ausgeübt.

Dr. med. Joseph Leidy, Professor der Anatomie an der Pensylvania-Universität und am Swarthmore-College in Philadelphia, ist am 30. April 1891 im 68. Lebensjahre gestorben. Er war ein sehr verdienter Forscher auf dem Gebiete der Zoologie und Paläontologie, von umfassenden Kenntnissen. Seine wissenschaftlichen Untersuchungen erstrecken sich über weit aus einander liegende Gebiete der Zoologie. In zahlreichen Publikationen beschäftigte er sich mit der amerikanischen Süsswasserfauna, worüber er namentlich eine umfangreiche, von prächtigen Abbildungen begleitete

Monographie der Süsswasserrhizopoden lieferte, in welcher er das Vorkommen zahlreicher europäischer Arten in Amerika feststellte und viele neue Formen beschrieb. Er untersuchte ferner die entoparasitischen Protozoen und Würmer und die Pflanzenthiere, von denen er besonders den feineren Bau der Lucernarier einer eingehenden Prüfung unterwarf. Osteologische Arbeiten über recente Wirbelthiere führten ihn auf das Gebiet der Paläontologie; er beschrieb in zahlreichen Abhandlungen die merkwürdigen fossilen Wirbelthiere Nordamerikas, vor Allem die von Nebraska, wodurch er sich um die Paläontologie grosse Verdienste erworben hat.

In Göttingen ist am 24. Juni 1891 einer der bedeutendsten und geistvollsten Physiker aller Zeiten, Wilhelm Weber, 87 Jahre alt verschieden. Das von ihm noch in jugendlichem Alter mit seinem Bruder Ernst Heinrich veröffentlichte classische Werk über die Wellenlehre, seine Entdeckung der elastischen Nachwirkung, seine akustischen und optischen Arbeiten, die mit seinem Bruder herausgegebene Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, ferner die in Gemeinschaft mit Gauss im Dienste ihrer erdmagnetischen Forschungen ausgeführte Herstellung des ersten elektromagnetischen Telegraphen, dessen Verwendbarkeit im Grossen wir dem erfinderischen Geiste unseres Steinheil verdanken, wären genügend, um seinem Namen eine hervorragende Stelle in der Geschichte der Physik zu sichern. Den höchsten und ihm allein gebührenden Ruhm aber hat er sich auf dem Gebiete der Elektricität erworben. In der Reihe von Abhandlungen „Elektrodynamische Maassbestimmungen“ hat er sich durch das bewunderswerthe absolute elektrische Maasssystem, welches Stromstärke, elektrometrische Kraft und Widerstand auf die Grundeinheiten Länge, Zeit und Masse zurückführt, ein unvergängliches Denkmal gesetzt, welches unerschüttert bleibt, wenn auch der internationale elektrische

Congress zu Paris 1881 den in Deutschland und England bereits gebräuchlich gewordenen Namen „Weber" für die Einheit der Stromstärke der historischen Gerechtigkeit zuwider durch den Namen „Ampère" ersetzt hat. Aber nicht blos die theoretischen Grundlagen der absoluten Messung, sondern auch die sinnreichsten Methoden zu ihrer experimentellen Ausführung sind ihm zu verdanken. In jener Reihe von Abhandlungen findet sich auch seine Theorie des Diamagnetismus, insbesondere aber seine Theorie der elektrischen Fernwirkungen, das berühmte Weber'sche Gesetz, welches in einem einzigen Ausdruck die elektrostatischen, elektrodynamischen und Induktionswirkungen umfasst. In diesem Ausdruck ist bereits jenes Verhältniss zwischen der elektrostatischen und elektromagnetischen Einheit der Elektricitätsmenge enthalten, welches schon von Weber in Gemeinschaft mit R. Kohlrausch sehr nahe gleich der Lichtgeschwindigkeit gefunden wurde und durch Maxwell's elektromagnetische Lichttheorie in der Gegenwart eine so grosse Wichtigkeit erlangt hat. Der Einfluss Wilhelm Weber's wird noch lange Zeit für die Gestaltung der Physik fühlbar bleiben.

Am 13. December 1891 ist in Brüssel der berühmte Chemiker Jean-Servais Stas, dem im vorigen Jahre unsere Akademie mit zahlreichen gelehrten Gesellschaften zum 50jährigen Jubiläum seines Eintrittes in die k. belgische Akademie der Wissenschaften ihre Glückwünsche darbrachte, 78 Jahre alt aus dem Leben geschieden. Stas hat den grössten Theil seines langen Lebens daran gewendet, die Atomgewichte einer Anzahl von Elementen und deren gegenseitige Beziehungen so genau als möglich zu bestimmen. Er hat zu diesem Zwecke mit seltener Ausdauer und unübertroffener Sorgfalt die Stoffe nach neuen Methoden rein dargestellt und die Analyse derselben auf einen bis dahin unerreichten Grad der Vollkommenheit gebracht, was ihm der

Art gelang, dass seine chemischen Bestimmungen kaum zurückstehen hinter den feinsten Messungsmethoden der Physik. Er schuf dadurch eine sichere Grundlage für die Chemie, indem er die Verbindungsgewichte der Elemente als unveränderliche darthat, aber ebenso gewiss die von Vielen früher angenommene Hypothese von Prout, dass die Atomgewichte der Elemente einfache Multipla desjenigen des Wasserstoffs seien, widerlegte. Es lehrte dies abermals, dass die Natur sich nicht immer der auf den ersten Blick dem menschlichen Geiste am einfachsten erscheinenden Mittel bedient, sondern dass der Zusammenhang der Dinge nicht selten ein verwickelterer ist wie hier selbst beim ersten Aufbau der Elemente zu chemischen Vərbindungen. Es wurde auch dadurch die so verlockende Vorstellung von einer einzigen Urmaterie, deren Atome sich nach verschiedenen Zahlen vereinigen und so die chemischen Atome des Wasserstoffs und der übrigen Elemente bilden sollen, vorläufig durch den Versuch, den einzigen sicheren Prüfstein jeder Theorie in den erklärenden Naturwissenschaften, in weite Ferne gerückt. Es wird auch dem edlen selbstlosen und charakterfesten Manne von Seiten der Wissenschaft das mannhafte Auftreten nicht vergessen werden, mit dem er als Präsident der belgischen Akademie in einer Ansprache an den König die von klerikaler Parteigunst statt von dem wissenschaftlichen Verdienste beeinflusste Zusammensetzung des Lehrkörpers der belgischen Universitäten freimüthig darlegte und die Freiheit der wissenschaftlichen Forschung, insoferne sie nur nach der Erkennung der Wahrheit strebt, vertheidigte.

Ferdinand Römer, Professor an der Universität zu Breslau (geboren am 5. Januar 1818 in Hildesheim, gestorben den 14. December 1891 in Breslau) war einer der vielseitigsten Geologen und Paläontologen. Er beherrschte das ganze Gebiet dieser beiden Wissenschaften und übte zugleich als

Mineralog eine höchst anregende Lehrthätigkeit aus. Seine geologischen Hauptarbeiten beschäftigen sich mit dem rheinischen Schiefergebirge, dem Teutoburger Wald, der Weserkette, dem schlesischen Lande und dem norddeutschen Diluvium; sie sind Muster sorgfältiger Beobachtung und lichtvoller Darstellung. Als Paläontologe war er in fast allen Theilen des Thierreichs erfolgreich thätig und galt in Deutschland unbestritten als erste Autorität für paläozoische Organismen. Während einer 1½ jährigen Reise nach Nordamerika hatte Römer überdies die erste Grundlage für die Geologie von Texas geschaffen. Der Verlust des verdienstvollen und hervorragenden Gelehrten wird in der Wissenschaft schmerzlichst beklagt.

Der am 29. December 1891 verstorbene Berliner Mathematiker Leopold Kronecker war am 7. December 1823 zu Liegnitz in Schlesien geboren worden. Ein Schüler von Kummer, Dirichlet und Jacobi hat er gleich mit dem Beginne seines mathematischen Schaffens sich einen Platz in der ersten Reihe der Mathematiker der Gegenwart erworben. Er ist der Schöpfer von fundamentalen zahlentheoretischen Arbeiten, von welchen ausgehend er weiterhin insbesondere die arithmetische Seite der Algebra, der Funktionentheorie und der Geometrie in wichtigen und weittragenden Untersuchungen gefördert hat. Einen Zeitraum von 40 Jahren hindurch war er bis zu seinem Ende in erstaunlicher Vielseitigkeit und Fruchtbarkeit thätig, durch seine Arbeiten in alle Zweige mathematischen Wissens eingreifend, und so hinterlässt sein vorzeitiger Tod eine nicht zu ersetzende Lücke in der mathematischen Welt.

Sir George Bidell Airy (geboren am 27. Juli 1801 in Alnwick in Northumberland, gestorben am 2. Januar 1892 in Greenwich) gehört zu den bedeutendsten englischen Astronomen dieses Jahrhunderts, er hat in nahezu 70 Jahre an-

dauernder rastloser Thätigkeit seiner Wissenschaft grosse Dienste geleistet. Seine Arbeiten haben nicht nur die theoretische Astronomie, die mathematische Geographie und durch sehr bedeutende optische Untersuchungen, wobei er der Entdecker des Astigmatismus des menschlichen Auges wurde, die Physik gefördert, sondern auch die astronomische Praxis, namentlich in England, ganz wesentlich beeinflusst. Als Royal Astronomer von England und Direktor der grossen Sternwarte in Greenwich hat er eine besonders segensreiche Thätigkeit entfaltet. Die Beobachtungs- und Rechnungsmethoden, welche an dieser Anstalt seit Jahrzehnten im Gebrauch sind, entsprechen vollkommen den bis in's Detail ausgearbeiteten Vorschlägen Airy's. Es ist sein grosses Verdienst die mit so reichen Mitteln ausgestattete Sternwarte in Greenwich nicht nur in ihrer so erfolgreichen Thätigkeit für Astronomie und Nautik erhalten, sondern derselben einen neuen und glänzenden Aufschwung ertheilt za haben.

Am 7. Januar 1892 ist in Wien der weitberühmte Professor der Physiologie Ernst v. Brücke nach einem rastlos thätigen und für die Wissenschaft überaus fruchtbaren Leben im Alter von 73 Jahren entschlafen. Brücke stand mit Du Bois-Reymond, Helmholtz und Ludwig an der Spitze der Physiologen der Gegenwart; er ist wie diese seine Freunde aus der Schule von Johannes Müller hervorgegangen, welcher vor Allen die Biologie in Deutschland aus den Banden der Naturphilosophie befreit und sie zu einer experimentirenden und erklärenden Naturwissenschaft erhoben hatte. Seine Schüler haben die von ihm gewiesenen Wege der Forschung, die der mühsamen Beobachtung und des genauen Versuches, weiter verfolgt und in vorher ungeahnter Weise die Beweise gehäuft, dass bei den Vorgängen im Thier und in der Pflanze nur die Kräfte der anorganischen Natur unter den in der Organisation gegebenen Bedingungen wirken. Es ist nicht

zum Wenigsten der ungemein scharfen Beobachtungsgabe und der geschickten Experimentirkunst Brücke's zu verdanken, wenn eine grosse Anzahl von früher ganz unerklärlichen Vorgängen im Organismus unserem Verständniss erschlossen worden sind. Man kann wohl sagen, dass Brücke unter seinen Fachgenossen der vielseitigste war, denn er bediente sich zur Erforschung der Lebenserscheinungen mit derselben Sicherheit und dem gleichen tiefen Verständniss des Mikroscops, der Methoden der Physik und Chemie und er war in fast allen Gebieten der Physiologie der Thiere und der Pflanzen thätig. Das Gefundene hat er, frei von jeglichem Vorurtheil und unsicherer Spekulation, nüchtern und ohne Ausschmückung berichtet. Es ist unmöglich, in wenig Worten ein Bild von Brücke's wissenschaftlicher Thätigkeit zu entwerfen, da seine sehr zahlreichen Arbeiten auf den verschiedensten Gebieten liegen; es bleibt nichts übrig als die hauptsächlichsten derselben kurz zu skizziren. — Als er in die Physiologie eintrat, hatten kurz vorher Schleiden und Schwann in den Zellen die Elementargebilde der Pflanzen und Thiere aufgefunden und war man daran gegangen, das Mikroscop zur Aufklärung der Lebensvorgänge an den organisirten Formen zu benützen. Brücke widmete einen grossen Theil seiner Thätigkeit der Untersuchung der feineren Struktur der Theile mittelst des Mikroscops und er hat so für die Physiologie derselben eine sichere Grundlage geschaffen. Ich erwähne davon nur die Entdeckung des Binnenmuskels des Auges, welche zur Erkenntniss des Mechanismus der Accomodation des Auges in die Nähe führte; die Bestimmung der Durchmesser der Stäbchen und Zapfen der Netzhaut, welche mit dem Abstande der eben getrennt wahrnehmbaren Bildchen übereinstimmen, wodurch es wahrscheinlich wurde, dass diese Gebilde die lichtperzipirenden sind; die Auffindung der Muskeln der Darmzotten, wodurch der merkwürdige Mechanismus der Resorption im Darm klar gelegt wurde; die

Kenntniss der Struktur der Darmfollikel, die dazu führte, diese Drüsen zu den Lymphdrüsen zu rechnen; den ersten Nachweis des Ursprungs der Lymphgefässe in den Lücken der Gewebe, durch den er die Bedeutung der Lymphe erkannte; die Untersuchung der Struktur der Blutkörperchen und seine berühmte Abhandlung über die Elementarorganismen, die ihn zum Mitbegründer der heutigen Zellentheorie machte. — Viele seiner Untersuchungen beschäftigen sich mit der Physiologie des Auges und mit optischen Problemen. Er brachte die erste Beobachtung über die Reflexion des Lichtes am Augenhintergrunde durch die Wahrnehmung des Augenleuchtens, womit er die Erfindung des Augenspiegels durch Helmholtz vorbereitete; daran reihten sich wichtige Versuche über die Erscheinungen der Nachbilder, über intermittirende Netzhautreizung, über Farbenempfindungen, über subjektive Farben und Contrastfarben, binokulare Farbenmischung, das stereoscopische Sehen, die Ursache des Nichtsehens der überrothen und übervioletten Strahlen. Dazu kamen noch rein physikalische Arbeiten über den Metallglanz, über die Farben trüber Medien im auf- und durchfallenden Lichte; dann seine Untersuchungen über die Ursachen der Färbung thierischer Gebilde und den merkwürdigen Farbenwechsel der Haut mancher Thiere, besonders des Chamäleon, sowie die wichtigen Beobachtungen der Muskelm im polarisirten Lichte, durch welche die feinere Struktur des Muskels und die Veränderung desselben bei der Contraktion zuerst genauer erkannt wurde. — Nicht minder erfolgreich waren seine chemischen Arbeiten über die Gerinnung des Blutes, die Todtenstarre des Muskels, welche er zuerst als die Gerinnung eines Eiweissstoffes bezeichnete, dann die über die Veränderungen des Eiweisses und des Stärkemehls bei der Verdauung, die Darstellung der Verdauungsfermente, die Methode der quantitativen Bestimmnng des Glykopens in der Leber. Besonders hervorzuheben sind noch seine Theorie



der Osmose und die Studien über die Mechanik der Bewegungen der Blätter der Mimosa pudica. — Von grösster Tragweite waren seine Bemühungen, das Zustandekommen der Sprachlaute, besonders der Consonanten, zu verstehen. In seinem Werke: „Die Grundzüge der Physiologie und Systematik der Sprachlaute für Linguisten und Taubstummenlehrer“ schuf er eine physiologische Lautlehre, indem er die Bewegungen der Sprachwerkzeuge bei dem Aussprechen der Laute der verschiedenen Sprachen genau beobachtete und beschrieb; die Sprachforschung und der Unterricht der Taubstummen hat daraus den grössten Nutzen gezogen. Er veröffentlichte dann eine neue Methode der phonetischen Transcription der Sprachlaute, wobei er für jeden Laut ein bestimmtes Schriftzeichen erfand, das die zur Erzeugung desselben nothwendigen Bewegungen der Theile anzeigt, so dass Jeder des Zeichens Kundige diesen Laut, auch einer ihm völlig unbekannten Sprache, richtig zu sprechen vermag. Indem er auf diese Weise zuerst die Sprache sichtbar machte, war eine Grundlage für weitere Bestrebungen in dieser Richtung gewonnen. Er begnügte sich jedoch nicht mit der Gestaltung der einzelnen Laute, sondern suchte auch zu ergründen, wie letztere zu Silben und Worten zusammengefügt werden; so gelang es ihm in seinem Buche über die physiologischen Grundlagen der neuhochdeutschen Verskunst die beim Rezitiren von Versen stattfindenden Schallerscheinungen und Sprachbewegungen zu erfassen und aus solchen physiologischen Beobachtungen bestimmte Regeln für die Verskunst abzuleiten. — Die Studien über die physiologische Optik und die Farben führten den mit feinem Kunstsinn und tiefem Kunstverständniss begabten Physiologen zum Nachdenken über das Wesen der bildenden Kunst; als Mitglied des Curatoriums des österreichischen Museums für Kunst und Industrie schrieb er für die Zwecke des Kunstgewerbes die „Physiologie der Farben“, worin er die Ursache der Harmonie und

Disharmonie der Farben ermittelte, so wie man die der Töne gesucht hatte. Für das Verständniss der Werke der bildenden Kunst von hoher Bedeutung waren seine anatomischen und physiologischen Erläuterungen: „Die Bruchstücke aus einer Theorie der bildenden Künste“ und „Die Schönheiten und Fehler der menschlichen Gestalt“. Dem für alles Wahre und Schöne begeisterten Manne, dem echten Gelehrten, welchem es heiliger Ernst mit der Wissenschaft war, werden die Vielen, welche aus seinen Werken Belehrung und Anregung geschöpft haben und noch schöpfen werden, stets dankbar sein.

Am 12. Januar d. J. starb zu Paris Jean Louis Armand de Quatrefages de Bréau, Professor der Anatomie und Ethnologie am Musée d'histoire naturelle und Mitglied des Instituts, 82 Jahre alt. Er hat sich zuerst durch äusserst gediegene Untersuchungen über die Lebensweise, den inneren Bau und die Entwicklungsgeschichte der wirbellosen Thiere ausgezeichnet, welche unsere Kenntnisse über die niedere Thierwelt beträchtlich erweiterten und ihn zu einem der geachtetsten Zoologen erhoben. Seine wichtigsten Arbeiten in dieser Richtung erstrecken sich auf den Stamm der Würmer; besonders waren seine Forschungen über die Strudelwürmer grundlegend für die Anatomie dieser Thiere, ebenso seine sorgfältigen Darstellungen vom Blute, dem Blutkreislauf und Athemapparat, vom Nervensystem und den Sinnesorganen, sowie der Entwicklungsgeschichte der Ringel- und Sternwürmer. Seine Untersuchungen über die Krankheiten der Seidenraupen griffen nützlich in das praktische Leben ein. In den letzten Jahrzehnten hat er sich jedoch mehr und mehr der Anthropologie zugewendet und sich dadurch einen weithin bekannten Namen gemacht. Ihm ist es mit zu verdanken, wenn diese Wissenschaft sich zu einem Zweige der Naturwissenschaft umgestaltet hat. Er war bestrebt die Entstehung der Menschenrassen, ihre Verbreitung auf der Erde

und ihre physischen und psychischen Unterschiede klar zu legen, besonders in seinem sämmtliche Völker der Erde umfassenden Werke, Crania ethnica, in welchem allerdings die heut' zu Tage als nothwendig erachteten Schädelmessungen noch nicht berücksichtigt sind. Mit Darwin's Lehre von der Entstehung der Arten durch natürliche Zuchtwahl konnte er sich nicht befreunden; er bekämpfte die Lehre von der Abstammung des Menschen vom Affen, vertheidigte die Auffassung von der Einheit des Menschengeschlechts, dessen Wiege er im nördlichen Asien suchte, und er lebte der Ueberzeugung, dass der Mensch sich vom Thier strenge durch das Geistige, durch das Vorhandensein moralischer und religiöser Ideen unterscheide. Die von dem sonst nüchternen Forscher in patriotischer Erregung geschriebene unglückliche Abhandlung: La race prussienne, welche er später wohl selbst beklagt hat, wollen wir Deutsche, in Anbetracht seiner sonstigen grossen Verdienste um die Wissenschaft, vergessen. Quatrefages stand in seinem Vaterlande in höchstem Ansehen als Vertreter der biologischen Fächer, namentlich bei wissenschaftlichen Versammlungen im In- und Auslande, wobei er durch seine ungewöhnliche Beredsamkeit und persönliche Liebenswürdigkeit unterstützt wurde.

Mit dem am 20. Februar d. J. im Alter von 75 Jahren in Heidelberg verstorbenen hervorragenden Chemiker Hermann Kopp ist ein mit unserem unvergesslichen Präsidenten Justus v. Liebig sowie mit den Erfolgen des Giessener Laboratoriums enge verbundener Forscher aus dem Leben geschieden. Er war ein anspruchsloser Gelehrter, von dem erstaunlichsten bis in die ersten Anfänge seiner Wissenschaft sich erstreckenden Wissen, von schärfster Beobachtungsgabe, durchdringendem Verstande und ungewöhnlicher Schaffenslust. Er hat vom Anfang seiner Thätigkeit an als einer der ersten Pioniere das für die theoretische Chemie so wichtige Grenzgebiet der

Physik und Chemie zum Gegenstande seiner Untersuchungen gemacht, wodurch er die merkwürdigen Beziehungen der physikalischen und chemischen Eigenschaften der Stoffe enthüllte und so die physikalische Chemie schuf. Wir verdanken ihm vor Allem die Entdeckung der Beziehung des specifischen Gewichtes zu der chemischen Zusammensetzung, ferner die Ermittelung der Volumenverhältnisse, nach welchen die Körper sich zu den chemischen Verbindungen vereinigen, wobei sich zeigte, dass einer gleichen Differenz in der chemischen Zusammensetzung gewisser flüssiger organischer Verbindungen auch eine gleiche Differenz der specifischen Volumen entspricht, dann die Auffindung der Beziehung des Siedepunktes vieler Flüssigkeiten zu ihrem specifischen Gewicht und zu ihrer chemischen Constitution, sowie viele Bestimmungen der specifischen Wärme der Körper. Ausser durch seine werkthätige Betheiligung an dem grossen Jahresberichte der Chemie und den Annalen der Chemie ist Kopp noch besonders bekannt geworden als der unübertreffliche Geschichtsschreiber der Chemie, wozu er wie kein Anderer vor ihm durch sein Wissen befähigt war; seine Geschichte der Chemie in vier Bänden ist ein durch Gründlichkeit und Fülle der Kenntnisse einzig dastehendes Werk, welches dem Chemiker zum ersten Male eine weitere Einsicht in die Entwicklung seiner Wissenschaft eröffnete, seinem Verfasser aber in der Geschichte der Chemie einen unvergesslichen Namen gemacht hat.

Möchten der kommenden Generation zum Segen der Wissenschaft solche Männer wie die, welche uns in diesem Jahre entrissen worden sind, nicht fehlen.

Sitzung vom 7. Mai 1892.

1. Herr Walther Dyck legt eine Abhandlung des Herrn Professor Alfred Pringsheim: „zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Convergenzbereich" vor.

2. Herr Gustav Bauer überreicht eine von dem auswärtigen Mitgliede, Herrn Professor Aurel Voss in Würzburg, eingesandte Abhandlung: „über die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie."

3. Herr Nikolaus Rüdinger übergiebt den von ihm zusammengestellten Katalog der anthropologischen Sammlung der hiesigen anatomischen Anstalt, welcher einen Theil der auf Anregung der deutschen anthropologischen Gesellschaft herausgegebenen Verzeichnisse des in Deutschland vorhandenen anthropologischen Materials darstellt.

Zur
Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich.

Von Alfred Pringsheim.

(Eingelaufen 7. Mai.)

Im 15. Bande der Acta Mathematica[1]) theilt Herr Mittag-Leffler die folgende von Herrn Fredholm aufgefundene Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, a^\nu \cdot x^{\nu^2} \quad (|a| < 1)$$

als erstes Beispiel einer Function mit, welche über einen gewissen Bereich (den Einheitskreis um den Nullpunkt) nicht analytisch fortgesetzt werden kann, d. h. für keine Stelle auf der Grenze dieses Bereiches nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar ist, obschon sie daselbst mit sämmtlichen Ableitungen stetig ist.

Die Reihe ist in der That wegen ihrer ausserordentlichen Einfachheit bemerkenswerth: dagegen scheint mir dieselbe keineswegs etwas principiell neues darzubieten und in dieser Hinsicht von Herrn Mittag-Leffler einiger-

1) „Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm." A. a. O. p. 279.



maassen überschätzt zu werden. Denn abgesehen davon, dass wohl Niemand, der sich mit der Theorie der Taylor'schen Reihe etwas näher beschäftigt hat, an der Existenz derartiger Functionen den geringsten Zweifel haben konnte, so möchte ich Herrn Mittag-Leffler nicht einmal darin beistimmen, dass solche Functionen bisher überhaupt noch nicht studirt worden seien.[1])

Die principielle Frage, um die es sich hierbei einzig und allein handelt, ist doch lediglich die: Giebt es Functionen, die auch nur an irgend einer einzigen Stelle endliche Differentialquotienten[2]) jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch nicht nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind? Denn aus einer Function, die eine derartige Singularität an einer Stelle besitzt, lassen sich ja dann nach bekannten Methoden — etwa mit Hilfe des von Herrn Cantor angegebenen Condensations-Principes[3]) — leicht solche bilden, bei denen die nämliche Singularität in allen Punkten einer beliebigen abzählbaren unendlichen Menge auftritt.

Nun hat aber im Gegensatz zu Lagrange, welcher geradezu die Ansicht aussprach,[4]) dass die Endlichkeit von $f^{(\nu)}(x)$ für jedes endliche ν die Gültigkeit der Entwicklung:

---

1) Es heisst a. a. O.: Autant que je sache, toutes les fonctions qui n'existent que dans un certain domaine du plan et qui ont été étudiées jusqu'ici, cessent d'exister, parce que les fonctions elles mêmes ou leurs dérivées deviennent discontinues sur la frontière.

2) Selbstverständlich handelt es sich hierbei im Falle einer complexen Variabeln nicht um Differentialquotienten nach allen möglichen Richtungen, sondern nur nach einem Theil dieser Richtungen.

3) Math. Ann. Bd. XIX. p. 588.

4) Théorie des Fonctions. Chap. V. Art. 30 (Oeuvres complètes, T. IX p. 65). — Leçons sur le Calcul des Fonctions. Leç. III. (Oeuvres compl. T. X. p. 72.)

$$f(x+h) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^\nu$$

(und damit eo ipso auch die Convergenz der betreffenden Reihe) nach sich ziehe, Cauchy schon in seinen ersten „Leçons sur le Calcul infinitésimal“ vom Jahre 1823 ausdrücklich die Bemerkung gemacht,[1]) dass nicht einmal die Convergenz der Taylor'schen Reihe hinreiche, um daraus die Gültigkeit der obigen Beziehung zu folgern. Und obschon sich gegen das einzige zum Belege seiner Behauptung angeführte Beispiel gewisse, nicht recht zu widerlegende Einwände erheben lassen (wovon weiter unten noch die Rede sein wird), so ist doch die sachliche Richtigkeit jener Cauchy'schen Bemerkung, die sich auch in zahlreichen besseren Compendien der Differentialrechnung reproducirt findet,[2]) meines Wissens von neueren Mathematikern niemals bestritten worden,[3]) mag dieselbe auch diesem oder jenem mathematischen Schriftsteller vielleicht gänzlich entgangen sein.[4])

1) a. a. O. p. 152. Auch in den „Leçons sur le Calcul différentiel“ vom Jahre 1826: p. 105, und den „Leçons sur le Calcul différentiel et intégral“ von Cauchy-Moigno: T. I. p. 71.

2) z. B. Hermite, Cours d'Analyse, T. I. p. 203. — Serret-Harnack, Differential- und Integral-Rechnung, T. I. p. 152. — Houël, Calcul infinitésimal, T. I. p. 286.

3) Nur der Vollständigkeit halber möchte ich als einzig mir bekannte Ausnahme ein Buch mit dem viel versprechenden Titel: „Le Calcul infinitésimal fondé sur des Principes rationnels“ von P. H. Fleury (Paris 1879) anführen. Was aber der Verfasser dort auf p. 234—236 vorbringt, enthält nur ein Körnchen Wahrheit, soweit er sich gegen die besondere Form des Cauchy'schen Beispiels wendet. Alles übrige sind theils nichtssagende, theils geradezu absurde Redensarten.

4) z. B. Hankel, der in seiner bekannten Abhandlung über die unendlich oft unstetigen Functionen (1870) gelegentlich noch ganz den Lagrange'schen Standpunkt vertritt: cf. Math. Ann. Bd. XX. p. 102.

Immerhin bin auch ich der Ansicht, dass jenes Cauchy'sche Beispiel nicht ausreicht, um die Existenz einer nicht entwickelbaren Function mit lauter stetigen Differential-Quotienten schlechthin evident zu machen. Dies wird nun aber thatsächlich vollständig geleistet durch ein von Du Bois Reymond im Jahre 1876 publicirtes Beispiel einer Function,[1]) welche an einer gewissen Stelle endliche und stetige Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzt, während die mit diesen Differentialquotienten gebildete Taylor'sche Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{f^{\nu}(x)}{\nu!} h^{\nu}$ für jedes noch so kleine h divergirt, woraus dann mit Leichtigkeit folgt, dass $f(x+h)$ in der Umgebung dieser Stelle x überhaupt nicht nach Potenzen von h entwickelt werden kann. Und da Du Bois Reymond es auch unternommen hat, aus dieser Function durch „Condensation" eine andere abzuleiten, welche die fragliche Eigenschaft in unendlich vielen, überall dicht liegenden Punkten einer Linie hat, so scheint mir eben die oben citirte Bemerkung des Herrn Mittag-Leffler nicht recht zutreffend.

Auf der anderen Seite hätte ich gegen die von ihm mitgetheilte Reihe des Herrn Fredholm, deren elegante Einfachheit ich nochmals ausdrücklich anerkenne, vom didaktischen Standpunkte mancherlei einzuwenden. Zunächst scheint mir schon der Beweis dafür, dass jene Reihe die fragliche Eigenschaft besitzt, nicht elementar genug: er beruht auf einem, keineswegs mehr den Elementen der Functionen-Theorie angehörigen Kowalewski'schen Satze über die Integrale partieller Differential-Gleichungen. Zweitens aber bietet diese Methode der Herleitung den grossen Nachtheil, dass wir von der Art und Weise des Zustandekommens einer solchen, doch immerhin merkwürdigen Singularität auch nicht die geringste Anschauung erhalten.

1) In den Abh. der b. Akad. Desgl. Bd. XXI dieser Zeitschrift. p. 109 ff.

Da mir dies nun aber gerade wünschenswerth erschien, so habe ich vor allem versucht, die schon von Du Bois Reymond befolgte Methode, die in mancher Beziehung der Ergänzung geradezu bedarf, in anderer der Erweiterung fähig ist, derartig zu vervollkommnen, dass es möglich wird, auf dem Wege einer zielbewussten Synthese völlig einwandfreie Beispiele von Functionen der gedachten Art zu erzeugen.

Zu diesem Behufe untersuche ich zunächst nochmals genau die Möglichkeiten, unter denen trotz der Endlichkeit aller Ableitungen von endlicher Ordnung die Entwickelbarkeit nach der Taylor'schen Reihe für eine bestimmte Stelle ausgeschlossen erscheint, und belege dieselben durch einfache, vermittelst directer Rechnung zu controlirende Beispiele (§ 1). Sodann werden allgemeine Bedingungen aufgestellt, unter denen es möglich ist, derartige singuläre Stellen in unendlicher Anzahl beliebig zu condensiren, ohne fürchten zu müssen, dass dieselben sich etwa gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben könnten (§ 2). Auf Grund dieser Bedingungen werden darauf Reihen construirt, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, auf dem Einheitskreise durchweg beliebig oft differenzirbar und daselbst dennoch nirgends entwickelbar zu sein.

Die auf diese Weise erzeugten Reihen sind natürlich minder einfach als die von Herrn Mittag-Leffler mitgetheilte, aber sie geben uns, wie gesagt, offenbar eine deutliche Vorstellung von einer der Möglichkeiten, wie derartige Singularitäten zu Stande kommen können.

Im übrigen aber bin ich auch, abgesehen von diesen Betrachtungen, im Stande, Reihen von ganz ähnlicher Einfachheit wie die des Herrn Fredholm anzugeben, bei denen sich die fragliche Eigenschaft ganz elementar beweisen lässt, indem man durch einfache Rechnung erkennen kann, dass die Taylor'sche Entwickelung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen auf dem Einheitskreise divergiren muss (§ 4).

§ 1.

Für das Innere eines gewissen Bereichs der complexen Variablen x sei $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ durch irgendwelche analytische Ausdrücke als eindeutige reguläre analytische Function definirt — z. B. durch gleichmässig convergirende Reihen von der Form $\Sigma f_\nu(x)$ bezw. $\Sigma f_\nu^{(n)}(x)$, wo die $f_\nu(x)$ in dem gedachten Bereiche reguläre algebraische oder transscendente Functionen bedeuten.

Auf der Begrenzung dieses Bereiches befinde sich eine Stelle α, für welche $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n noch eindeutig bestimmt, endlich und stetig sei. Wenn dann eine für irgendwelche Umgebung von $x = \alpha$ convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - \alpha)$ existirt, dergestalt dass die Beziehung:

$$(1) \qquad f(x) = \mathfrak{P}(x - \alpha)$$

besteht für denjenigen Theil des Convergenz-Bezirkes von $\mathfrak{P}(x - \alpha)$, welcher in den ursprünglichen Definitions-Bereich von $f(x)$ hineinfällt, so hat dieselbe sicher die Form:

$$(2) \qquad \mathfrak{P}(x - \alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} (x - \alpha)^\nu.$$

Daraus folgt aber, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ im Punkte α gemachten Voraussetzungen zwei und nur zwei Möglichkeiten denkbar sind, unter denen keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - \alpha)$ von der gedachten Beschaffenheit existiren kann, nämlich:

1. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!} (x - \alpha)^\nu$ für $|x - \alpha| < \varepsilon$ divergirt, wie klein man auch die positive Grösse ε annehmen möge,

2. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ zwar für irgend welche Umgebung der Stelle a convergirt, aber ihre Summe nicht den Werth $f(x)$ hat, dort, wo ihr Convergenz-Bezirk noch in den Definitions-Bereich von $f(x)$ hineinfällt.

Die erste dieser beiden Möglichkeiten bietet für unsere Vorstellung auch nicht die geringste Schwierigkeit dar. Da nämlich $f^{(n)}(a)$, wenn auch für jedes endliche n endlich, mit unendlich wachsendem n geradezu in der Regel gleichfalls in's Unendliche wachsen wird[1]) (andernfalls würde ja die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^n$ beständig convergiren, also ihre Summe eine ganze transscendente Function darstellen, was doch nur ein ganz specieller Fall wäre; das gleiche findet selbst dann noch statt, wenn $f^{(n)}(a)$ mit n so unendlich wird, wie die n^{te} Potenz einer beliebig grossen endlichen Zahl), so liegt absolut keine Veranlassung dazu vor, an der Existenz von Functionen zu zweifeln, bei welchen für irgend welche Werthe $x = a$ die Zunahme von $f^{(n)}(a)$ für wachsende n so stark ist, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ für keinen noch so kleinen Werth von $|x-a|$ convergirt.

1) Dieser Umstand ist thatsächlich von manchen mathematischen Autoren völlig übersehen worden, indem sie die für die Existenz der Taylor'schen Reihe nothwendige Bedingung von der „Endlichkeit sämmtlicher Ableitungen" dahin missverstanden, als müsse $f^n(a)$ für jedes noch so grosse n unter einer festen endlichen Grenze bleiben. Auf diesem Missverständnisse beruht z. B. eine völlig irrthümliche Bemerkung des Herrn Mansion über den Rest der Taylor'schen Reihe und speciell über das oben erwähnte Beispiel von Du Bois Reymond. (Note sur quelques principes fondamentaux d'analyse" Art. III. — Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1879.) Desgleichen ein unzulänglicher Beweis des Taylor'schen Satzes von F. König. (Nouvelle démonstration du théorème de Taylor. Nouv. Annales, 2de Série, T. XIII p. 270.)

Und es lassen sich auch mit Leichtigkeit hinreichende Bedingungen für die Art des Unendlichwerdens von $f^{(n)}(\alpha)$ für $n = \infty$ aufstellen, welche die Convergenz der obigen Reihe für jede noch so kleine Umgebung der Stelle α definitiv ausschliessen.

So folgt z. B. aus dem Cauchy'schen Fundamental-Kriterium zweiter Art, dass die Reihe für kein noch so kleines $|x - \alpha|$ convergiren kann, wenn für $\nu = \infty$

$$\lim \left\{ \frac{|f^{(\nu-1)}(\alpha)|}{(\nu-1)!} : \frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \right\} = \lim \left\{ \nu \cdot \left| \frac{f^{(\nu-1)}(\alpha)}{f^{(\nu)}(\alpha)} \right| \right\} = 0$$

wird, oder anders geschrieben:

$$\left| \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)} \right| \succ \nu$$

eine Bedingung, die sicher erfüllt ist, wenn von einer beliebigen Stelle $\nu \geqq n$ ab:

$$\left| \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)} \right| = \nu \cdot \psi(\nu) \tag{3}$$

ist, wo $\psi(\nu)$ eine positive Grösse bedeutet, die mit ν — wenn auch beliebig langsam in's Unendliche wächst.

Geht man, statt von dem Cauchy'schen Kriterium, von der Bemerkung aus, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ sicher beständig divergirt, wenn für jedes noch so kleine positive ε und für $\nu \geqq n$ die Beziehung besteht:

$$\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \cdot \varepsilon^\nu \geqq 1$$

so gelangt man statt der Bedingung (3) zu der folgenden:

$$\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!} \geqq (\psi(\nu))^\nu \tag{4}$$

welche, wegen $\nu! < \nu^\nu$, a fortiori erfüllt ist, falls für $\nu > n$:

$$(5) \qquad |f^{(\nu)}(a)| > (\nu \cdot \psi(\nu))^{\nu} > e^{\nu}\{lg\,\nu + \varphi(\nu)\}$$

wobei $\varphi(\nu) = lg\,\psi(\nu)$ gleichfalls eine mit ν beliebig langsam in's Unendliche wachsende positive Grösse bedeutet.

Ich will nun zunächst ein überaus einfaches und, wie ich glaube, in jeder Hinsicht tadelfreies Beispiel[1]) einer Function mit der eben besprochenen Eigenschaft angeben. Es werde gesetzt:

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{a^{-\nu} + x}$$

wo a eine positive Zahl > 1 bedeutet. Diese Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für die ganze x-Ebene mit Ausschluss einer beliebig kleinen Umgebung der Stellen $x = -a^0, -a^{-1}, -a^{-2} \cdots$. Sie convergirt insbesondere auch noch für $x = 0$ und zwar gleichmässig für jeden

1) Bei der a. a. O. von Du Bois Reymond angegebenen Reihe die mit der hier betrachteten formal sehr verwandt ist, nämlich:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu)!} \frac{x^{2\nu}}{x^2 + a_{\nu}^2}$$

(wobei $a_{\nu}^2 > 0$, $\lim a_{\nu} = 0$) sind, wie man auf den ersten Blick erkennt, die Differential-Quotienten n^{ter} Ordnung so complicirt, dass ihre explicite Aufstellung äusserst umständlich erscheint. Diese wird nun a. a. O. in der That auch gar nicht geliefert, vielmehr wird nur gezeigt, dass $|f^{(n)}(x)|$ für jedes endliche n unter einer gewissen mit n endlich bleibenden Grenze liegt. Zur Bildung von $f^{(n)}(0)$ wird sodann die gliedweise Entwickelung der obigen Reihe nach Potenzen von x benützt, was einerseits eine unnöthige Weitläufigkeit der Rechnung zur Folge hat, andererseits aber auch den Nachtheil mit sich bringt, dass die Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ an der kritischen Stelle $x = 0$ wohl aus allgemeinen Principien geschlossen, aber nicht *ad oculos* demonstrirt werden kann, wie es doch bei einem derartigen Beispiele wünschenswerth erscheint.

Bereich, welcher den Punkt $x=0$ auf der Begrenzung enthält einschliesslich dieser Begrenzung, sofern nur keine weitere Stelle der Strecke $\overline{0(-1)}$ im Innern oder auf der Begrenzung jenes Bereiches liegt. Denn in der That wird für alle solchen Werthe x der absolute Betrag von $\dfrac{1}{a^{-\nu}+x}$ eine Grösse von der Form $\lambda \cdot a^{\nu}$ (wo λ endlich) nicht übersteigen, woraus dann ohne Weiteres die gleichmässige Convergenz der Reihe in dem behaupteten Umfange resultirt.

Das gleiche gilt von jeder Reihe, die sich durch n malige Differentiation aus der obigen ergiebt, sodass also auch:

$$(7) \qquad f^{(n)}(x)=(-1)^n \cdot n! \sum_0^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{(a^{-\nu}+x)^{n+1}}$$

gesetzt werden kann. Daraus folgt aber für $x=0$:

$$(8) \begin{cases} f(0)=\sum_0^{\infty}{}_{\nu} \dfrac{1}{\nu!} a^{\nu}=e^{a} \\ f^{(n)}(0)=(-1)^n \cdot n! \sum \dfrac{1}{\nu!} a^{\nu(n+1)}=(-1)^n \cdot n! \, e^{a^{n+1}} \end{cases}$$

also für hinlänglich grosse Werthe von n sicher:

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} > (e^{n})^{n}$$

woraus auf Grund der oben aufgestellten Bedingung (4) sofort erkannt wird, dass die Reihe $\sum \dfrac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu}$ für jedes noch so kleine x divergirt, obschon $f(x)$ für $x=0$ mit sämmtlichen Ableitungen von jeder endlichen Ordnung endlich und ausser in der Richtung der negativen reellen Axe auch durchweg stetig ist.

Man bemerkt, dass bei der eben betrachteten Reihe die auf der negativen reellen Axe gelegenen Punkte $-a^{0}$, $-a^{-1}$,

$-a^{-2}\cdots$, welche die Häufungs-Stelle 0 haben, singuläre Stellen für die einzelnen Glieder sind. Verlegt man diese Stellen in die negative oder positive imaginäre Axe, indem man in (6) $a^{-\nu}$ durch $\pm a^{-\nu} i$ ersetzt, so kann man durch Vereinigung der conjugirten Glieder auch eine Function mit durchweg reellen Coefficienten herstellen, welche mit allen Ableitungen in der Umgebung der Nullstelle auf der reellen Axe vorwärts und rückwärts stetig ist, und für welche die Mac Laurin'sche Reihe dennoch divergirt. Man erhält auf diese Weise:

$$(9) \qquad f(x) = \frac{i}{2} \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{1}{a^{-\nu} i + x} + \frac{1}{a^{-\nu} i - x} \right\}$$

$$= \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \frac{a^{-\nu}}{a^{-2\nu} + x^2}$$

also:

$$(10) \quad f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} n! \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{(-1)^n}{(a^{-\nu} i + x)^{n+1}} + \frac{1}{(a^{-\nu} i - x)^{n+1}} \right\}$$

$$= (-1)^n \cdot n! \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \frac{g_n(x)}{(a^{-2\nu} + x^2)^{n+1}}$$

wo:

$$g_n(x) = \frac{1}{2i} \{ (x + a^{-\nu} i)^{n+1} - (x - a^{-\nu} i)^{n+1} \}$$

Da hier:

$$(11) \quad | f^{(2m-1)}(0) | = 0 \quad | f^{(2m)}(0) | = (2m)!\,(-1)^m e^{a^{2m+1}}$$

so erkennt man wiederum ganz direct (also ohne irgendwie functionentheoretische Gesichtspunkte zu Hülfe zu nehmen) dass die Mac Laurin'sche Reihe für jedes noch so kleine x divergirt, und es dürfte daher dieses Beispiel insbesondere geeignet sein, auch im Rahmen einer gewöhnlichen Vorlesung über Differential-Rechnung die Möglichkeit dieses Vorkommnisses zu illustriren.

Was nun die zweite der oben erwähnten Eventualitäten betrifft, dass nämlich die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ zwar convergiren, aber ihre Summe von $f(x)$ verschieden sein könne, so scheint man, soviel ich weiss, bis zum heutigen Tage nicht über das von Cauchy a. a. O. gegebene Beispiel:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

nicht hinausgekommen zu sein. Indessen fehlt demselben aus zwei Gründen die rechte Beweiskraft: einmal (was auch Du Bois Reymond in dem citirten Aufsatze ausdrücklich hervorhebt), weil hier $f(0)$ und $f^{(n)}(0)$ nicht „eigentlich" definirt sind, d. h. nicht durch directes Einsetzen von $x=0$ aus einer der Definitionen:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}\frac{1}{x^{2\nu}} \quad \text{oder:} \quad e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!}\frac{1}{x^{2\nu}}\right)^{-1}$$

berechnet werden können, sondern lediglich als $\lim f(\pm\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ eine feste Bedeutung gewinnen;[1]) zweitens aber nach meinem Dafürhalten auch deshalb, weil das so definirte $f(0)$ mit allen Ableitungen den besonderen Werth Null hat, sodass von einer convergirenden Mac Laurin'schen Reihe auch wiederum nur cum grano salis die Rede sein kann, da dieselbe formal eigentlich gar nicht existirt — ein Mangel, der durch Einführung einer Function von der Form $f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ (wo $\varphi(x)$ entwickelbar) zwar verdeckt, aber in seinem Wesen doch nicht gehoben wird.

Man erhält nun aber völlig einwandfreie Beispiele dieser Art, wenn man in den oben betrachteten Reihen (6) und (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ ersetzt. Auf diese Weise entsteht aus (6):

1) Dieser Einwand wird auch durch das Raisonnement des Herrn Hermite (Cours d'Analyse, T. I. p. 203) nicht entkräftet.

(12) $f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{1}{a^{-\nu} + x}$ also: $f(0) = e^{-a}$

woraus:

$$(13) \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n} \cdot n! \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \frac{1}{(a^{-\nu} + x)^{n+1}}$$

$$\text{also: } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n} e^{-a^{n+1}} = (-1)^{n} \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{n+1}}$$

Hier erkennt man aber, dass die Reihe:

$$\sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu} = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{\nu+1}} x^{\nu}$$

geradezu **beständig convergirt**. Dass sie aber nicht mit $f(x)$ übereinstimmen kann, geht daraus hervor, dass $f(x)$ wegen der in unmittelbarer Nachbarschaft der Nullstelle sich häufenden singulären Stellen $x = -a^{-\nu}$ für keine noch so kleine Umgebung der Nullstelle nach Potenzen von x entwickelt werden kann (wie sich mit aller Strenge aus den Betrachtungen des folgenden Paragraphen ergiebt).

Will man statt der eben betrachteten Function, welche bei reell veränderlichen x an der Stelle $x = 0$ mit sämmtlichen Differentialquotienten nur **vorwärts** stetig ist, wiederum eine solche construiren, für welche das Gleiche sowohl **vorwärts** als **rückwärts** stattfindet, so braucht man nur in (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}$ zu ersetzen. Alsdann ergiebt sich:

(14) $f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{a^{-\nu}}{a^{-2\nu} + x^{2}}$ also: $f(0) = e^{-a}$

und daraus:

(15) $f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad f^{(2m)}(0) = (2m)! \, (-1)^{m} \cdot e^{-a^{2m+1}}$

Die Mac Laurin'sche Reihe würde auch hier wiederum beständig convergiren, stellt aber nicht die Function $f(x)$ **dar.** Bezeichnet man ihre Summe mit $S(x)$, sodass also:

$$(16) \qquad S(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu+1}} \cdot x^{2\nu}$$

so stimmt $S(x)$, $S^{(n)}(x)$ nur für $x = 0$ mit $f(x)$, $f^{(n)}(x)$ überein. Bildet man daher:

$$(17) \quad F(x) = f(x) - S(x)$$

$$= \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \left\{ \frac{1}{\nu!} \frac{a^{-\nu}}{a^{-2\nu} + x^2} - \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu+1}} \cdot x^{2\nu} \right\}$$

so liefert dieselbe ein Beispiel — und, wie ich glaube, das erste bekannte Beispiel — einer Function, welche für alle endlichen reellen x incl. $x = 0$ mit sämmtlichen Ableitungen endlich und stetig und auch noch für $x = 0$ eigentlich definirt ist, dabei aber (gleichwie die für $x = 0$ nicht eigentlich definirte Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$) die Eigenschaft besitzt, in beliebiger Nähe der Nullstelle nicht zu verschwinden, obschon sie für $x = 0$ mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet. Damit erscheint aber die von Lagrange im 5. Capitel seiner Théorie des Fonctions[1]) geäusserte Ansicht, dass eine stetige Function, welche für irgend einen Werth der Variablen mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet, identisch verschwinden müsse, nunmehr endgültig widerlegt.

§ 2.

Der allgemeine Typus der im vorigen Paragraphen betrachteten Reihen lautet offenbar:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$$

---

1) Oeuvres complétes, T. IX, p. 63.

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \cdots$ eine abzählbare Punktmenge bedeutet,[1]) welche (mindestens) einen nicht zur Menge gehörigen Grenzpunkt α besitzt: gerade dadurch, dass die Stelle $x = \alpha$ für kein einzelnes Glied der $f(x)$ definirenden Reihe eine sinläre ist, entsteht an der Stelle $x = \alpha$ für $f(x)$ jene besondere Singularität, welche $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ endlich und nach allen Richtungen stetig sein lässt, in denen nicht unendlich viele Punkte der Menge (α_ν) liegen. Es fragt sich aber, ob auch wirklich in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ sein muss. Dies ist nämlich keineswegs selbstverständlich: denn wenn auch in jeder noch so kleinen Umgebung von α unendlich viele Punkte α_ν liegen, welche für je ein Glied der obigen Reihe singuläre Stellen sind, so wäre es gerade wegen der Unbegrenztheit ihrer Anzahl möglich, dass sie sich zusammengenommen in ihrer Wirkung annulliren.[2])

1) Ich bemerke, dass die folgenden Betrachtungen auch Gültigkeit behalten für Reihen von der etwas allgemeinen Form:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{(a_\nu - x)^{m_\nu}}$$

wo die m_ν auch negativ gebrochene oder beliebige rationale positive Zahlen bedenten.

2) Gerade in dieser Hinsicht enthält der oben erwähnte Versuch von Du Bois Reymond, durch Condensation eine Function der fraglichen Art herzustellen eine Beweislücke. Es wird nämlich eigentlich nur gezeigt, dass man eine Function bilden kann, welche die betreffende Singularität in einer beliebig grossen endlichen Anzahl (n) von Punkten eines gewissen Intervalles besitzt, und dass die Function auch noch für $n = \infty$ einen bestimmten Sinn behält. Alsdann aber heisst es (a. a. O. p. 617): „Es wäre freilich noch direct zu zeigen, dass die (bei dem eben erwähnten Grenzübergange resultirende) Function $F(x)$ nicht entwickelbar ist, doch wollen wir hier diese Rechnung nicht anstellen." — Ich halte es für sehr zweifelhaft, ob sich das hier überhaupt auf dem Wege blosser Rechnung erweisen lässt.



Es sei nun irgend ein einfach zusammenhängendes von einer Curve C begrenztes Flächenstück gegeben, welches keinen Punkt der abzählbaren Menge (α_ν) im Innern oder auf der Begrenzung enthält, während auf der letzteren der eine Grenzpunkt α (aber kein weiterer, falls solche vorhanden) sich befinden soll. Ist dann $\Sigma|c_\nu|$ convergent, so stellt nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass die obige Reihe eine innerhalb C reguläre analytische Function dar. Dies gilt aber auch noch für jeden Punkt x' auf der Curve C — mit eventueller Ausnahme des einen Punktes α. Denn da nach Voraussetzung x' weder der Menge (α_ν) angehören, noch ein Grenzpunkt derselben sein kann, so existiert stets eine gewisse Umgebung von x', innerhalb deren kein Punkt der Menge (α_ν) liegt, sodass also $f(x)$ für diese Umgebung wiederum regulär bleibt.

Um nun das Verhalten von $f(x)$ für die Stelle $x = \alpha$ zu untersuchen, bemerke man zunächst, dass allemal, wenn man den Punkt α durch einen der Menge selbst angehörigen Punkt — etwa α_0 — ersetzt, dieser sicher eine singuläre Stelle für $f(x)$ sein muss (gleichgültig, ob α_0 ein Grenzpunkt der Menge ist oder nicht). Man erkennt dies, wie Herr Goursat gezeigt hat,[1]) indem man die obige Reihe folgendermassen in drei Partien zerlegt:

$$f(x) = \frac{c_0}{\alpha_0 - x} + \sum_1^n{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} + \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$$
$$= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

wo n so fixirt sein soll, dass $\sum_{n+1}^\infty |c_\nu| = \vartheta \cdot c_0 \quad (\vartheta < 1)$ wird, was in Folge der Convergenz von $\Sigma|c_\nu|$ stets möglich ist.

1) Sur les Fonctions à Espaces lacunaires. Bulletin des Sciences mathématiques, 1887. 2ième Série, T. XI. p. 109.

Alsdann ist $f_2(x)$ regulär für eine gewisse Umgebung der Stelle α_0, während $f_1(x)$ in α_0 eine singuläre Stelle besitzt, welche durch $f_3(x)$, wie mit Hülfe der Bedingung: $\sum_{n+1}^{\infty} |c_\nu| = \vartheta \cdot c_0$ leicht zu ersehen ist, nicht annullirt werden kann.

Tritt sodann an die Stelle des einen Punktes α_0 eine unendliche Anzahl solcher Punkte, welche auf der Curve C oder irgendwelchen Bögen derselben überall dicht liegen, so lässt sich weiter folgern, dass jeder solche Bogen eine singuläre Linie für $f(x)$ sein muss, sodass also für keinen Punkt α' eines solchen Bogens eine Reihe $\mathfrak{P}(x-\alpha')$ existirt, welche innerhalb C mit $f(x)$ übereinstimmt.

Die obige Schlussweise beruht nun aber wesentlich darauf, dass der Term $\frac{c_0}{x-\alpha_0}$ wirklich in $f(x)$ vorkommt, während in dem hier zu betrachtenden Falle die Existenz eines Gliedes von der Form $\frac{c}{x-\alpha}$ gerade ausgeschlossen ist, da ja α der Menge der α_ν nicht angehören sollte.

Es lässt sich indessen zeigen, dass auch in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ ist, sofern man nur die Menge (α_ν) der einzigen Beschränkung unterwirft, dass in jeder Nähe von α solche α_ν vorhanden sind, die höchstens in Linien (aber nicht in Flächentheilen) oder überhaupt nicht überall dicht liegen.[1])

Angenommen nämlich $f(x)$ wäre für die Stelle α regulär, so müsste das Gleiche für alle Stellen innerhalb eines

1) Damit ist nicht ausgeschlossen, dass ein Theil der Menge (α_ν) in der Nähe von α auch in Flächentheilen überall dicht liegt. Der Beweis behält sogar noch seine Gültigkeit, wenn die Menge (α_ν) in der Nähe von α ausschliesslich aus Punkten besteht, welche in Flächentheilen überall dicht liegen, sofern nur irgendwo auf der Begrenzung derselben in jeder Nähe von α stets auch Punkte α_ν (nicht bloss Grenzpunkte) liegen.

gewissen um a zu beschreibenden Kreises der Fall sein. Dies ist aber in Folge der über die Vertheilung der a_ν gemachten Voraussetzung unmöglich, da nach dem angeführten Satze innerhalb jenes Kreises stets singuläre Punkte oder Linien von $f(x)$ liegen müssen.

Die Möglichkeit dieser Schlussweise bleibt aber unverändert bestehen, wenn an die Stelle des einen Grenzpunktes a eine beliebige Anzahl solcher Punkte tritt, die auch auf C oder irgend einem Bogen von C überall dicht liegen dürfen, sofern nur die Punkte a_ν in der Umgebung jedes solchen Punktes a der oben angegebenen Bedingung genügen, und es gilt somit der folgende Satz:

Befinden sich auf der geschlossenen Curve C beliebig viele Grenzpunkte a der durchweg **ausserhalb** des Bereiches (C) gelegenen Punktmenge (a_ν), so ist für die innerhalb (C) reguläre analytische Function:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{c_\nu}{a_\nu - x} \qquad \left(\text{wo } \sum_0^\infty {}^\nu |c_\nu| \text{ convergent}\right)$$

jeder Punkt a ein singulärer Punkt und jeder Curvenbogen von C, auf dem Punkte a überall dicht liegen, eine singuläre Linie, sofern in beliebiger Nähe jedes Punktes a stets Punkte a_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien (nicht in Flächentheilen) überall dicht liegen.

Beispiele solcher Punktmengen sind:

$$a_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \qquad a_{\mu,\nu} = p_\mu \varepsilon^\nu \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, 3 \ldots \\ \mu = 1, 2, 3 \ldots \end{pmatrix}$$

wo p_ν positiv und für jedes endliche $\nu > 1$, dagegen $\lim_{\nu=\infty} p_\nu = 1$ (z. B. $p_\nu = 1 + \frac{1}{\nu}$, $p_\nu = 1 + \frac{1}{2^\nu}$, $p_\nu = e^{\frac{1}{\nu}}$ etc.), während ε eine complexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1,

aber keine Einheitswurzel sein soll, also $\varepsilon = e^{2s\pi i}$, wo s eine Irrationalzahl bedeutet. Die Punkte ε^ν ($\nu = 0, 1, 2 \cdots$ liegen dann auf dem Einheitskreise überall dicht, während die Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu$, $\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \cdot \varepsilon^\nu$ durchweg ausserhalb des Einheitskreises liegen, aber alle Punkte desselben zu Grenzpunkten haben. Dabei nähern sich mit wachsendem ν die Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu$ in spiralartiger Anordnung dem Einheitskreise und liegen nirgends (auch auf keiner Linie) überall dicht, während die Punkte $\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \cdot \varepsilon_\nu$ auf allen um den Nullpunkt concentrischen Kreisen mit den Radien p_μ ($\mu = 0, 1, 2 \cdots$), aber nicht in irgendwelchen Flächentheilen überall dicht liegen.

§ 3.

Auf Grund der im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtung sind wir nunmehr im Stande, Reihen zu construiren, welche im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen Bereiches — etwa des Einheitskreises um den Nullpunkt — durchweg endliche Ableitungen jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch in beliebig vielen, auch unendlich vielen auf dem Kreise überall dicht liegenden Punkten α nicht nach Potenzen von $(x - \alpha)$ entwickelbar sind, also in dem zuletzt genannten Falle eine analytische Fortsetzung über den Einheitskreis hinaus nicht zulassen.

Es seien also ausserhalb des Einheitskreises unendlich viele Punkte α_ν gegeben, welche auf der Peripherie desselben beliebig viele Grenzpunkte α besitzen sollen. Man hat alsdann für jedes endliche ν: $|\alpha_\nu| > 1$, während für $\nu = \infty$ entweder geradezu $\lim |\alpha_\nu| = 1$ ist oder wenigstens die untere Unbestimmtheitsgrenze von α_ν den Werth 1 haben muss (mit anderen Worten: es können die Punkte α_ν auch noch ausserhalb des Einheitskreises beliebig viele Grenzpunkte besitzen).

In der Umgebung jedes auf dem Einheitskreise gelegenen Grenzpunktes α sollen die α_ν der in dem Satze des vorigen Paragraphen statuirten Bedingung genügen. Bedeutet dann $\Sigma | c_\nu |$ eine convergirende Reihe, so ist die Reihe:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$$

zunächst innerhalb des Einheitskreises gleichmässig convergent und kann für diesen Bereich in die ebendaselbst convergirende Potenzreihe:

$$(2) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\lambda A_\lambda x^\lambda \quad \text{wo:} \quad A_\lambda = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden. Man kann nun aber durch eine passende Wahl der c_ν leicht erzielen, dass die Reihe (1), wie auch die Potenzreihe (2) auch noch **auf** der Peripherie des Einheitskreises unbedingt und gleichmässig convergiren. Da nämlich für $|x| < 1$ die Beziehung besteht:

$$| \alpha_\nu - x | \geq | \alpha_\nu | - | x | \geq | \alpha_\nu | - 1$$

so hat man insbesondere für alle Punkte x auf der Peripherie:

$$\left| \frac{| \alpha_\nu | - 1}{\alpha_\nu - x} \right| \leq 1$$

und n wird daher die Reihe (1) noch auf dem genannten Einheitskreise unbedingt und gleichmässig convergiren, falls die Reihe $\sum \frac{| c_\nu |}{| \alpha_\nu | - x}$ convergirt, also für:

$$c_\nu = (| \alpha_\nu | - 1) \cdot c_\nu'$$

wo c_ν' das Glied einer absolut convergirenden Reihe bedeutet. Zugleich erkennt man, dass dann auch die Potenzreihe (2) auf dem Einheitskreise noch unbedingt und gleichmässig convergirt, denn man hat:

$$\sum_0^\infty{}^\lambda |A_\lambda x^\lambda|_{|x|=1} = \sum_0^\infty{}^\lambda \left| \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}} \right|$$

$$\leq \sum_0^\infty{}^\nu |c_\nu| \sum_0^\infty{}^\lambda \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^{\lambda+1} = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu|-1}$$

Ferner folgt aus (1) und (2) durch n malige Differentiation:

$$f^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}} \tag{3}$$

$$= \sum_n^\infty{}^\nu \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) A_\lambda x^{\lambda-n}$$

zunächst wieder für das Innere des Einheitskreises. Es werden aber auch diese beiden Reihen für ein bestimmtes n (und dann *a fortiori* für jedes kleinere n) noch auf dem Einheitskreise unbedingt und gleichmässig convergiren und demgemäss dort auch noch die n^{te} Ableitung von $f(x)$ darstellen, wenn die c_ν so gewählt werden, dass die Reihe:

$$\sum \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^{n+1}}$$

convergirt, was man offenbar wiederum erzielen kann, wenn man setzt:

$$c_\nu = (|\alpha_\nu| - 1)^{n+1} \cdot c'_\nu \quad \text{wo } \Sigma |c'_\nu| \text{ convergirt.}$$

Daraus folgt nämlich zunächst wieder ohne weiteres die unbedingte und gleichmässige Convergenz der Reihe $\sum \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$ für alle Punkte der Peripherie, während das Gleiche für die entsprechende Potenzreihe erkannt wird aus der Beziehung:

$$\sum_{n}^{\infty}{}^{\lambda}\, \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) \,|\, A_\lambda \,|$$

$$\leq \sum_{n}^{\infty}{}^{\lambda}\, \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) \sum_{0}^{\tau}{}^{\nu} \frac{|\, c_\nu \,|}{|\, \alpha_\nu \,|^{\lambda+1}}$$

$$\leq \sum_{0}^{\tau}{}^{\nu}\, c_\nu \cdot \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \right|^{n+1} \sum_{0}^{\tau}{}^{\lambda} (\lambda + 1)(\lambda + 2) \cdots (\lambda + n) \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \right|^{\lambda}$$

$$= n! \sum_{0}^{\tau}{}^{\nu} \frac{|\, c_\nu \,|}{(|\, \alpha_\nu \,| - 1)^{n+1}}$$

Nun lassen sich aber die c_ν geradezu so fixiren, dass die Reihe:

$$\sum \frac{|\, c_\nu \,|}{(|\, \alpha_\nu \,| - 1)^m}$$

nicht nur für irgend ein bestimmtes (und dann eo ipso für jedes kleinere) m, sondern geradezu für jedes noch so grosse m (ohne obere Grenze) convergirt.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{|\, \alpha_\nu \,| - 1} = q_\nu \quad \text{d. h. } |\, \alpha_\nu \,| = 1 + \frac{1}{q_\nu}$$

wo also q_ν wesentlich positiv und für $\nu = \infty : \lim q_\nu = \infty$ oder die obere Unbestimmtheitsgrenze von q_ν unendlich wird, so hat man identisch:

$$\text{(5)} \qquad \frac{|\, c_\nu \,|}{(|\, \alpha_\nu \,| - 1)^m} = |\, c_\nu \,| \cdot q_\nu^m = |\, c_\nu \cdot r_\nu \,| \cdot \frac{q_\nu^m}{r_\nu}$$

und wenn daher r_ν positiv und so gewählt wird, dass für jedes noch so grosse:

$$\text{(6)} \qquad \lim_{\nu = \infty} \frac{q_\nu^m}{r_\nu} = \lim \frac{(e^m)^{\lg q_\nu}}{r_\nu} = 0$$

wird — was z. B. für $\lim q_\nu = \infty$ stets der Fall ist, wenn man setzt:[1])

$$(7) \qquad r_\nu = b^{-q_\nu} \qquad (b < 1)$$

oder auch:

$$(8) \qquad r_\nu = [lg\, q_\nu]! \qquad \text{(wo } [x] \text{ die grösste in } x \text{ enthaltene ganze Zahl)}$$

so genügt es nach Gleichung (5) für den gewünschten Zweck in jedem Falle, wenn sodann:

$$(9) \qquad |c_\nu| \cdot r_\nu = |c'_\nu| \quad \text{also:} \quad c_\nu = \frac{c'_\nu}{r_\nu}$$

genommen wird, wo $|c^1_\nu|$ das Glied einer convergenten Reihe bedeutet. Wenn aber hierbei schon $\frac{q_\nu^m}{r_\nu}$ für jedes noch so grosse m das Glied einer convergenten Reihe bildet, was z. B. stets der Fall ist für $q_\nu \gtrsim \nu$ und $r_\nu = b^{-q_\nu}$, ebenso für $q_\nu \lesssim a^\nu$ $(a > 1)$ und $r_\nu = \nu!$), so reicht es schon hin, wenn man setzt:

$$(10) \qquad |c_\nu|\, r_\nu = 1 \quad \text{also:} \quad |c_\nu| = \frac{1}{r_\nu}$$

Hiernach ergiebt sich aber in Verbindung mit dem Satze des § 2 das folgende Resultat:

Besitzt die durchweg ausserhalb des Einheitskreises gelegene abzählbare Menge (α_ν) auf dem

---

1) Wäre nur die obere Unbestimmtheitsgrenze von $q_\nu = \infty$ so würde man der Forderung beispielsweise genügen können, indem man setzt:

$$r_\nu = b^{-\nu \cdot q_\nu}$$

oder:

$$r_\nu = \nu . [lg\, q_\nu]!$$

Einheitskreise beliebig viele Grenzpunkte, so lassen sich auf mannigfache Weise unendliche Reihen von Grössen c_ν stets so bestimmen, dass die Reihen:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} \qquad f^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$$

nicht nur im Innern, sondern auch auf der Peripherie unbedingt und gleichmässig convergiren und in die eben daselbst unbedingt und gleichmässig convergirenden Potenzreihen:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty{}^\nu A_\lambda x^\lambda \\ f^{(n)}(x) &= \sum_n^\infty{}^\nu \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+)\cdot x^{\lambda-n} \end{aligned}\right\} \quad \text{wo: } A_\lambda = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden können.

Bedeutet dann α einen auf der Peripherie befindlichen Grenzpunkt der α_ν von solcher Beschaffenheit, dass in jeder Nähe von α stets Punkte α_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien, nicht aber in Flächentheilen, überall dicht liegen, so existirt keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ derart dass die Gleichung $f(x) = \mathfrak{P}(x-\alpha)$ besteht für Punkte in beliebiger Nähe von α, die im Innern oder auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Wenn also solche Punkte α auf der Peripherie überall dicht liegen (sodass schliesslich jeder Punkt der Peripherie als ein Grenzpunkt der Menge (α_ν) anzusehen ist), so existirt für $f(x)$ keine analytische Fortsetzung über die Peripherie des Einheitskreises hinaus, obschon $f(x)$ mit sämmt-

lichen Ableitungen jeder endlichen Ordnung dort noch endlich und stetig ist.

Der Vollständigheit halber sei hierzu noch bemerkt, dass der Convergenzbezirk der Reihe $\sum \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$ in Folge der den Punkten α_ν auferlegten Beschränkung mit dem Einheitskreise noch nicht erschöpft sein wird, sondern je nach der Wahl der α_ν noch aus einem oder mehreren (eventuell auch unendlich vielen) Stücken ausserhalb des Einheitskreises bestehen muss. Alsdann stellt also auf Grund der von Herrn Weierstrass gegebenen Begriffsbestimmung der analytische Ausdruck $\sum \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$ in verschiedenen Gebieten verschiedene analytische Function dar.

Um mit Hülfe des oben ausgesprochenen allgemeinen Satzes bestimmte Beispiele von Functionen zu construiren, die trotz der Endlichkeit der Ableitungen über den Einheitskreis nicht fortgesetzt werden können, mögen etwa die am Schlusse des vorigen Paragraphen angeführten Punktmengen benützt werden. Sei also:

$$\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \quad (\text{wo } \varepsilon = e^{2s\pi i},\ s \text{ eine Irrationalzahl})$$
$$p_\nu > 1,\ \lim p_\nu = 1$$

so kann man setzen:

$$f(x) = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{b^{\frac{1}{p_\nu - 1}}}{p_\nu \varepsilon^\nu - x} \qquad (b < 1)$$

Setzt man speciell:

$$p_\nu = 1 + \tfrac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3 \cdots)$$

so wird:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{b^\nu}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\varepsilon^\nu - x} = \sum_1^\infty{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda$$

$$\text{wo } A_\lambda = \sum_1^\infty{}^{\nu} \left(\frac{\nu}{\varepsilon^\nu(\nu+1)}\right)^{\lambda+1} b^\nu$$

Nimmt man $p_\nu = e^{\frac{1}{\nu}}$, also $\frac{1}{p_\nu - 1} \sim \nu$, so ergiebt sich, wenn man für ε seinen Werth einsetzt:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{b^\nu}{e^{\frac{1}{\nu}+2\nu s \pi i} - x} = \sum_0^\infty{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda$$

$$\text{wo } A_\lambda = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{b^\nu}{e^{\left(\frac{1}{\nu}+2\nu s\pi i\right)(\lambda+1)}}.$$

Diese Reihen convergiren dann auch noch gleichmässig für das ganze Gebiet ausserhalb des Einheitskreises mit Ausschluss der unmittelbaren Umgebung der Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \varepsilon^\nu$, welche ausserhalb des Einheitskreises keine weiteren Grenzpunkte besitzen. Zwischen den Werthen der Reihen $f(x)$ im Innern und ausserhalb des Einheitskreises existirt jedoch kein „analytischer" Zusammenhang.

Es werde ferner gesetzt:

$$\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \varepsilon^\nu$$

wo etwa wiederum $p_\mu = 1 + \frac{1}{\mu}$ oder $p_\mu = e^{\frac{1}{\mu}}$ $(p = 1, 2, 3 \cdots)$ und ε gleichfalls die frühere Bedeutung hat. Bildet man alsdann:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^{\mu} \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{c_{\mu,\nu}}{p_\mu \varepsilon^\nu - x}$$

so erkennt man leicht, dass die gleichmässige Convergenz von $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ auf der Peripherie wiederum erhalten bleibt, wenn man etwa setzt:

$$c_{\mu,\nu} = b^{\mu+\nu}$$

Alsdann ergiebt sich:

$$f(x) = \sum_1^{\infty}{}^{\mu} \sum_1^{\infty}{}^{\nu} \frac{b^{\mu+\nu}}{p_{\mu}\,\varepsilon^{\nu} - x} = \sum_0^{\infty}{}^{\lambda} A_{\lambda}\, x^{\lambda}$$

wo:

$$A_{\lambda} = \sum_1^{\infty}{}^{\mu} \sum_1^{\infty}{}^{\nu} \frac{b^{\mu+\nu}}{(p_{\mu}\,\varepsilon^{\nu})^{\lambda+1}} = \sum_1^{\infty}{}^{\mu} \frac{b^{\mu}}{p_{\mu}^{\lambda+1}} \sum_1^{\infty}{}^{\nu} \frac{b^{\nu}}{\varepsilon^{(\lambda+1)\nu}}$$

$$= \frac{b}{\varepsilon^{\lambda+1} - b} \sum_1^{\infty}{}^{\mu} \frac{b^{\mu}}{p_{\mu}^{\lambda+1}}$$

Der Convergenz-Bereich von $f(x)$ besteht hier — abgesehen von dem Innern des Einheitskreises — aus dem ganzen Ebenenstücke ausserhalb des Kreises mit dem Radius p_1 (wobei für die oben getroffene specielle Wahl $p_1 = 2$ bez. $p_1 = e$ ist), sodann aus unendlich vielen concentrischen Ringen, welche begrenzt werden von Kreisen mit den Radien p_{μ} und $p_{\mu+1}$ $(\mu = 1, 2, 3 \cdots)$. Auf allen diesen Kreisen liegen die Punkte $a_{\mu,\nu}$ überall dicht, sodass also die Reihe $f(x)$ in diesen sämmtlichen Stücken ihres Convergenzbereiches lauter verschiedene analytische Functionen darstellt. Jedoch besitzt sie nur auf dem Einheitskreise die Eigenschaft mit allen Ableitungen endlicher Ordnung endlich und stetig zu sein, während sie auf den sämmtlichen übrigen Begrenzungen divergirt.

Will man Functionen construiren, welche in der einen Halbebene — z. B. der oberen — einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen stetig und dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind, so braucht man nur das Innere des Einheitskreises mit Hülfe der Substitution:

$$x = \frac{z - i}{z + i}$$

auf die obere z-Halbebene abzubilden.

§ 4.

Ich gehe nun dazu über, einen weiteren Typus von Reihen anzugeben, welche auf der Grenze eines gewissen Bereiches noch mit allen Ableitungen endlich und stetig, dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind. Obschon dieselben mit den Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen nicht in unmittelbarem Zusammenhange stehen, so liefern sie doch eine sehr brauchbare Illustration zu den im § 1 entwickelten Principien, indem sie bei ausserordentlicher formaler Einfachheit auf dem Wege ganz elementarer Rechnung deutlich erkennen lassen, warum die Entwickelbarkeit auf jener Grenzlinie vollständig aufhört: nämlich, weil die Ableitungen n^{ter} Ordnung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen mit n so stark zunehmen, dass die Taylor'sche Reihe nicht mehr convergirt.

Es werde gesetzt:

$$(1) \qquad \psi(t) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} e^{a^{\nu} t i} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} u_{\nu}$$

wo a eine positive ganze Zahl ≥ 2, $t = \tau_1 + \tau_2 i$ eine complexe Variable bedeutet. Um den Convergenzbereich dieser Reihe zu erkennen, hat man:

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_{\nu}} = \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{a^{\nu}(a-1) t i}$$

$$= \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{-a^{\nu}(a-1) \cdot \tau_2} \cdot e^{a^{\nu}(a-1)\tau_1 i}$$

und daher für $\nu = \infty$:

$$\lim \left| \frac{u_{\nu+1}}{u_{\nu}} \right| = \lim \frac{e^{-a^{\nu}(a-1) \cdot \tau_2}}{\nu+1} \begin{cases} = 0, \text{ wenn } \tau_2 > 0 \\ = \infty, \text{ wenn } \tau_1 < 0 \end{cases}$$

d. h. die Reihe convergirt absolut für alle t mit nicht-negativem imaginärem Bestandtheil, also innerhalb der oberen

Halbebene einschliesslich der reellen Axe. Das Gleiche gilt auch für sämmtliche Ableitungen von $\psi(t)$. Man hat nämlich:

$$(2) \qquad \psi^{(n)}(t) = i^n \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu t i}$$

und daher insbesondere für reelle t:

$$\sum_0^\infty {}^{\nu} \left| \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu t i} \right| = \sum_0^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} = e^{a^n}$$

sodass also die Reihe für $\psi^{(n)}(t)$ auch auf der ganzen reellen Axe absosut convergirt. Es stellt hiernach $\psi(t)$ für die obere Halbebene eine analytische Function von t dar, welche noch auf der Grenze dieses Bereiches, nämlich der reellen Axe, mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Nichtsdestoweniger lässt sich leicht zeigen, dass $\psi(t)$ über diesen Bereich nicht analytisch fortgesetzt werden kann.

Setzt man zunächst in (2) $t = 2\varkappa\pi$ $(\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$, so folgt:

$$| \psi^{(n)}(2\varkappa\pi) | = e^{a^n}$$

und ebenso für $t = (2\varkappa + 1)\pi$:

$|\psi^{(n)}((2\varkappa + 1)\pi)| = e^{a^n}$ bezw. $= e^{a^n} - 2$ (ersteres, wenn a ungerade, letzteres, wenn a gerade).

Daraus erkennt man aber zunächst, dass die Taylor'sche Reihe für sämmtliche Stellen $t = \mu\pi$ $(\mu = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$ divergirt (cf. § 1, Gl. (5)).

Das Gleiche findet nun aber statt für alle Stellen $t = \frac{\mu\pi}{a^p}$, wenn p eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Setzt man nämlich $\psi^{(n)}(t)$ in die Form:

$$\psi^{(n)}(t) = i^n \cdot \sum_0^{p-1}{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_p^{\infty}{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i}$$

$$= i^n \cdot \sum_0^{p-1}{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_0^{\infty}{}_\nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} e^{a^{p+\nu} t i}$$

so ergiebt sich zunächst für $t = \frac{2\varkappa\pi}{a^p}$ $(\varkappa = \pm 1, \pm 2 \cdots)$:

$$\psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) = i^n \cdot \sum_0^{p-1}{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^{\nu-p} \cdot 2\varkappa\pi i} + i^n \cdot \sum_0^{\infty}{}_\nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} \tag{3}$$

$$= i^n \left\{ C_{p,n} + e^{a^n} \right\}$$

wo:

$$C_{p,n} = \sum_0^{p-1}{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} \left\{ e^{a^{\nu-p} \cdot 2\varkappa\pi i} - 1 \right\}$$

Nun ist aber:

$$| C_{p,n} | < 2 \cdot \sum_0^{p-1}{}_\nu a^{n\nu} < 2 \cdot \frac{a^{pn} - 1}{a - 1} < 2 \cdot a^{pn} \tag{4}$$

folglich wird, wie gross man auch p annehmen mag, n stets so gross genommen werden können, dass der in (3) vorkommende Term e^{a^n} beliebig viel grösser ist als $| C_{p,n} |$; dies gilt selbst dann noch, wenn man p über alle Grenzen wachsen lässt, sobald man nur $n > p$ nimmt. Somit folgt aus (3) und (4), dass für unendlich wachsende n

$$\psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) \sim e^{a^n} \tag{5}$$

wird, und das Nämliche ergiebt sich auf analoge Weise auch für $\psi^{(n)}\left(\frac{(2\varkappa+1)\pi}{a^p}\right)$. In Folge dessen muss aber die Taylor'sche Reihe für $\psi(t)$ an allen Stellen $t = \frac{m\pi}{a^p}$ divergiren,

wie gross man auch p nehmen mag, und da diese Stellen auf der reellen Axe überall dicht liegen, so ergiebt sich in der That, dass $\psi(t)$ für keinen einzigen reellen Werth t_0 nach Potenzen von $t - t_0$ entwickelt werden kann.

Die Reihe (1) ist aber auch noch in einer weiteren Beziehung lehrreich, insofern man daran erkennen kann, dass auch die zweite der beiden in § 1 erörterten Möglichkeiten, nämlich die Convergenz der Taylor'schen Reihe

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu$$

aber ohne die Gültigkeit der Beziehung

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu = \psi(t)$$

geradezu in unendlich vielen Punkten jedes noch so kleinen Intervalles stattfinden kann.

Angenommen nämlich, es sei jetzt speciell a eine ungerade Zahl von der Form $4k+3$ ($k = 0, 1, 2 \cdots$). Alsdann bemerke man zunächst, dass alle ungeraden Potenzen von a gleichfalls von der Form $4k+3$, dagegen alle geraden von der Form $4k+1$ sind, sodass also:

$$e^{\frac{1}{2}a^{2\nu-1}\pi i} = -i \qquad e^{\frac{1}{2}a^{2\nu}\pi i} = +i$$

wird. Setzt man daher in (2) $t = (m+\frac{1}{2})\pi$, so ergiebt sich:

$$\psi^{(n)}((m+\tfrac{1}{2})\pi) = i^n \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{m a^\nu \pi i} \cdot e^{\frac{1}{2}a^\nu \cdot \pi i}$$

$$= (-1)^m \cdot i^{n+1} \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{a^{n\nu}}{\nu!}$$

also:

$$(6) \qquad |\psi^{(n)}((m+\tfrac{1}{2})\pi)| = e^{-a^n}$$

sodass die Taylor'sche Reihe zunächst an allen Stellen $t_0 = (m+\frac{1}{2})\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$) für jedes noch so grosse $(t - t_0)$ convergirt.

Man findet nun aber ganz analog wie oben Gl. (3), dass

$$(7) \qquad \left|\psi^{(n)}\left(\frac{m+\frac{1}{2}}{a^p}\pi\right)\right| < C'_{p,n} + e^{-a^n}$$

wo:

$$(8) \qquad C'_{p,n} < a^{pn}$$

und da, wie gross man auch p nehmen möge, die Reihe mit dem allgemeinen Gliede: $\frac{1}{n!}\left\{a^{pn} + e^{-a^n}\right\} r^n$ für jedes noch so grosse r convergirt, so folgt, dass die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu$ für alle Stellen $t_0 = \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{a^p}$ d. h. schliesslich für unendlich viele, überall dicht liegende Punkte der reellen Axe convergirt und zwar sogar beständig convergirt. Da aber in beliebiger Nähe jeder solchen Stelle andere liegen, für welche nach dem zuvor gesagten die Taylor'sche Reihe divergirt, so kann sie nicht die Summe $\psi(t)$ haben.

Hieran knüpft sich naturgemäss die Frage, ob es denkbar wäre, dass die Taylor'sche Reihe für alle Stellen eines gewissen Intervalles convergirte oder genauer gesagt, ein Convergenz-Intervall besitzt, dessen Ausdehnung unter eine bestimmte angebbare Grösse nicht herabsinkt, und dass ihre Summe nichtsdestoweniger mit der erzeugenden Function nicht übereinstimmte?

Diese Frage ist aber zu verneinen. Angenommen nämlich, es convergire die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} \cdot r^\nu$$

für $t_0 \leq t < t_1$ und $r \leq r_1$, so hat man sicher für alle Werthepaare (t, r) aus dem angegebenen Bereiche:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi^{(n)}(t)}{n!} r^n = 0$$

und daher insbesondere, wenn ϱ die kleinere der beiden Grössen $(t_1 - t_0)$ und r_1 bezeichnet:

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\psi^{(n)}(t_0 + \vartheta\varrho)}{n!} \cdot \varrho^n = 0 \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

Nun gilt aber mit Benützung der Lagrange'schen Restform die Entwickelung:

$$(10) \qquad \psi(t_0 + h) = \sum_0^{n-1} {}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu + \frac{\psi^{(n)}(t_0 + \vartheta h)}{n!} h^n$$

und man erkennt aus Gl. (9), dass dieses Restglied für $h \leq \varrho$ mit unendlich wachsenden n verschwindet, sodass also in der That die Beziehung gilt:

$$(11) \qquad \psi(t_0 + h) = \sum_0^{\infty} {}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu \quad \text{für } h \leq \varrho.$$

Damit ist also bewiesen, dass die Taylor'sche Reihe nicht für alle Stellen eines beliebigen kleinen Intervalles einen Convergenzbereich von angebbarer Grösse besitzen kann, ohne dort auch die betreffende Function darzustellen. Mithin gilt der Satz:

Wenn die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu$ für irgend einen bestimmten Werth t_0 der reellen Variablen t und für $h < \varrho$ convergirt, ohne die Summe $\psi(t_0 + h)$ zu besitzen, so müssen entweder in jeder beliebigen Nähe von t_0 Stellen t' existiren, sodass $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t')}{\nu!} h^\nu$ für jedes noch so kleine h divergirt, oder es muss zum mindesten die untere Grenze für die Convergenzradien aller möglichen Reihen: $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu$ für Werthe t in der Nähe von t_0 den Werth Null haben.[1])

1) Da der Convergenzradius von $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu$ in dem vorliegen-

Der Satz gilt offenbar auch für den Fall einer complexen Variablen t. Denn man kann die Gesammtheit der Stellen, welche auf irgend einer im Punkte t_0 beginnenden geradlinigen Strecke liegen, durch eine ganze lineare Substitution auf ein Stück der reellen Axe congruent abbilden und sodann wieder die oben benützte Schlussweise anwenden.

Bei dem oben betrachteten Beispiel:

$$(1) \qquad \psi(t) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} e^{a^\nu t i}$$

tritt also — wenn $a = 4k + 3$ — thatsächlich der Fall ein, dass in jedem noch so kleinen Intervalle Stellen liegen, für welche der Convergenz-Radius der Taylor'schen Reihe unendlich gross ist (nämlich für $t = \frac{(m + \frac{1}{2})\pi}{a^p}$), und ebenfalls solche, für welche dieselbe gleich Null ist (nämlich für $t = \frac{m\pi}{a^p}$).

Ersetzt man in (1) t durch $(-t)$, so wird die Reihe:

$$(12) \qquad \psi(-t) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!} e^{-a^\nu t i}$$

eine analytische Function darstellen, welche nur für die untere Halbebene einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen existirt, und es ergeben sich durch Addition und Subtraction von $\psi(t)$ und $\psi(-t)$ (wobei, wie man leicht erkennt, die fraglichen Singularitäten sich nicht etwa herausheben können), die Reihen:

$$(13) \qquad \psi_1(t) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\cos a^\nu t}{\nu!} \qquad \psi_2(t) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\sin a^\nu t}{\nu!}$$

---

den Falle offenbar eine unstetige Function von t ist, so brauchte in der That keine bestimmte Stelle t' zu existiren, wo derselbe wirklich $= 0$ wird.

als Beispiele von Functionen, welche für alle reellen t mit sämmtlichen Ableitungen jeder noch so grossen endlichen Ordnung endlich und stetig sind, und dennoch nicht in das complexe Gebiet der Variablen t fortgesetzt werden können.

Setzt man schliesslich in (1) noch $e^{ti} = x$, so folgt, dass die Function:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!} x^{a^\nu} \tag{14}$$

nicht über den Einheitskreis hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, obschon sie noch auf der Peripherie derselben mit allen Anleitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Der allgemeine Typus derartiger Reihen lautet offenbar:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu \cdot x^{m_\nu} \tag{15}$$

wo die m_ν positive ganze Zahlen von der Beschaffenheit bezeichnen, dass der grösste gemeinsame Theiler von m_ν, $m_{\nu+1}$, $m_{\nu+2}, \cdots$ mit ν selbst in's Unendliche wächst, während die Coefficienten c_ν so beschaffen sein müssen, dass die Reihe:

$$\sum{}^\nu c_\nu m_\nu^n = S_n$$

für jedes endliche n zwar convergirt, aber ihre Summe mit n so stark zunimmt, dass:

$$\sum{}^n \frac{S_n}{n!} \varrho^n$$

für jeden noch so kteinen Werth ϱ divergirt.

Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

Von A. Voss in Würzburg.

(Eingelaufen 7. Mai.)

Die Gruppe der Formeln, durch welche seit Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas die Eigenschaften einer krummen Fläche dargestellt werden, erhalten ihr eigenthümliches Gepräge durch die Art und Weise, wie dieselben auf die bei der Biegung unveränderlichen Coefficienten des Längenelementes bezogen sind. Man scheint aber bisher weniger darauf geachtet zu haben, dass in diesen Formeln nur in analytischer Weise die bei der Biegung unveränderlichen Elemente eingeführt sind, während gerade in geometrischer Hinsicht die Einführung von Biegungsinvarianten rein geometrischen Characters in den Vordergrund zu treten hat, wenn man den Gedankengang, der Gauss geleitet zu haben scheint, verfolgt.

Es ist die Absicht der folgenden Bemerkungen, die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie so darzustellen, dass, soweit wie überhaupt möglich, nur geometrische Biegungsinvarianten[1]) in denselben auftreten, insbesondere auch in allgemeinster Weise das Krümmungsmaass als Function solcher auszudrücken.

1) Ueber die Unterscheidung zwischen analytischen und geometrischen Biegungsinvarianten vergl. unten Nr. 4.

Die Form, welche die allgemeinen Gleichungen der Flächentheorie in Folge dessen annehmen, steht zwar in naher Beziehung zu den von Aoust und Codazzi[1]) eingeführten Gleichungen, durch welche eine gerade für die Anwendungen sehr wichtige geometrische Interpretation derselben erreicht wird, unterscheidet sich aber eben durch den vorhin angeführten principiellen Gesichtspunkt von denselben.

In Beziehung auf orthogonale Curvensysteme auf einer Oberfläche hat übrigens neuerdings Herr Knoblauch[2]) in einer Arbeit, deren Tendenz sich, soweit sie das Krümmungsmaass betrifft, mit der vorliegenden berührt, an die Bonnet'sche Formel erinnert, welche das Krümmungsmaass durch die geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien ausdrückt.

Nr. 1. Bezeichnet man mit e, f, g die Coefficienten des Längenelementes auf einer Fläche, so ist nach Gauss das Krümmungsmaass K nur abhängig von den Grössen e, f, g, den ersten Differentialquotienten derselben nach den unabhängigen Parametern u, v und den zweiten Differentialquotienten e_{vv}, f_{uv}, g_{uu}. Aus dieser analytischen Thatsache folgt für zwei isometrisch[3]) auf einander bezogene Flächen die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses.

---

1) Diese Formeln geben bekanntlich die Fundamentalgleichungen in einer für die Anwendungen ausserordentlich wichtigen Gestalt (vgl. namentlich das grundlegende Mémoire von Bonnet, Journal de l'École Polyt. Bd. 25 und 26, sowie die Théorie générale des surfaces von Ribaucour, Journ. v. Liouville Ser. IV, tom. 7), insofern nur geometrische Grössen, nämlich die normale und geodätische Krümmung, sowie die geodätische Torsion der Coordinatenlinien in denselben auftreten, entfernen sich aber eben durch die Einführung dieser grösstentheils nicht invarianten Elemente von der Beziehung auf das Längenelement.

2) Ueber die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen, Acta Mathematica Bd. 15 S. 249.

3) Der Kürze wegen nenne ich zwei auf einander abwickelbare Flächen isometrisch auf einander bezogen oder isometrisch.

Für diesen fundamentalen Satz der Flächentheorie giebt es nun eine Reihe verschiedener Darstellungen, welche denselben in mehr oder minder anschaulicher Weise durch geometrische Betrachtungen begründen, die sich auf invariante Elemente bei der Isometrie beziehen. Zu erwähnen ist hier zunächst die Gauss'sche Definition des Krümmungsmaasses als Grenzwerth des Quotienten des sphärischen Bildes eines Flächenstückes durch den Inhalt des letzteren selbst, welche, wie Minding[1]) gezeigt und auch Herr Sturm neuerdings wieder in Erinnerung gebracht hat,[2]) leicht so gefasst werden kann, dass die Invarianz von K dabei unmittelbar hervorgeht.

Auf eine andere Art hat Herr Natani das Krümmungsmaass mittelst eines Winkelexcesses durch den folgenden Satz[3]) ausgedrückt:

„Wird eine Fläche durch zwei Curvenschaaren in Vierecke und diese wieder durch eine dritte Curvenschaar in je zwei Dreiecke getheilt, so ist die Krümmung gleich dem Unterschied der um einen Schnittpunkt herumliegenden sechs Dreieckswinkel von 2π dividirt durch den Inhalt des anstossenden Viereckes."

Dieser Satz, welcher auf der Auffassung der Fläche als Grenze eines Polyeders mit dreiseitigen ebenen Flächen be-

---

Diese Ausdrucksweise dürfte sich auch dadurch rechtfertigen, dass es sich bei den meisten die Abwickelbarkeit der Flächen auf einander betreffenden Untersuchungen nicht um die wirkliche Ausführung der Abwickelung, die hinsichtlich ihres Umfanges jedesmal von der speciellen Natur der Gleichungen abhängt, handelt, sondern nur um die durch die Erhaltung der metrischen Verhältnisse bedingte Möglichkeit derselben.

1) Journal v. Crelle, Bd. 19.

2) Mathematische Annalen Bd. 21 S. 380—382.

3) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung von F. Joachimsthal, 2. Aufl. bearb. von L. Natani, 1881 S. 233.



ruht, bei dessen Deformation der Excess der Kantenwinkel an den Eckpunkten ungeändert bleibt, liefert eine mit dem geometrischen Character der Fläche im engsten Zusammenhang stehende Deutung für den Zähler des Krümmungsmaasses. Aehnliche Ueberlegungen finden sich indessen auch in Herrn Sturm's Note, in der auf Grund Steiner'scher Betrachtungen die Fläche als Grenze eines Polyeders aufgefasst und der Begriff der Ecken und Kantenkrümmung desselben eingeführt wird.

Nr. 2. Während bei diesen Untersuchungen allerdings die gehäufte Betrachtung infinitesimaler Beziehungen nicht wohl zu vermeiden ist, so namentlich in der Natani'schen Darstellung, der man wohl in mehrfacher Beziehung eine strengere Form wünschen möchte,[1]) bringen andere Formeln in analytischer Darstellung, aber in directer Beziehung auf geometrisch invariante Elemente, die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses zum Ausdruck.

So besteht nach Bertrand und Puiseux für den Excess E der Länge einer hinreichend kleinen geodätischen den Flächenpunkt umgebenden Kreislinie mit dem Radius s über die Peripherie einer ebenen Kreislinie mit demselben Radius, dividirt durch die $\frac{3}{2}$ Potenz des Inhaltes J jenes geodätischen Kreises die Formel

$$\lim\left(\frac{E}{J^{\frac{3}{2}}}\right)_{s=0} = -\frac{K}{3\sqrt{\pi}}\;{}^{2})$$

welche K direct durch den Grenzwerth des Verhältnisses zweier bei der Biegung invarianter Grössen ausdrückt.

Nach Beltrami[3]) gilt für den Bogen ϱ einer von einem

1) Eine solche wurde mir übrigens unlängst durch Herrn Finsterwalder mitgetheilt.

2) Vgl. Monge, Applications, Ausg. v. Liouville, S. 583 u. f. Der Satz selbst ist dort freilich auf andere Art ausgedrückt.

3) Beltrami, Zur Theorie des Krümmungsmaasses, Math. Annalen Bd. 1, S. 580. Die Beltrami'sche Darstellung von K durch

beliebigen Punkte der Fläche ausgehenden Linie die merkwürdige Formel

$$\lim \left[\Delta_2 \log \left(\frac{1}{\varrho} \right) \right]_{\varrho = 0} = \frac{K}{3}$$

welche K durch den an der geometrischen Invariante ϱ auszuführenden invarianten Differentialprocess Δ_2 ausdrückt.[1])

Nr. 3. Die flächentheoretischen Fundamentalgleichungen d. h. die Relationen zwischen den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung und die partiellen Differentialgleichungen der Fläche selbst, besitzen dagegen an und für sich keine Form, aus welcher sich ihr invarianter Character in geometrischer Hinsicht unmittelbar erkennen liesse. Denn die Coefficienten e, f, g des Längenelementes sind nur analytische Biegungsinvarianten, sie haben aber an und für sich keine geometrische Bedeutung, da sie von der Bestimmungsweise der Variabeln u, v selbst abhängig sind und sich ändern, sowie diese durch Functionen je einer neuen unabhängigen Variabeln u', v' ersetzt werden.

Allerdings haben die Gauss'schen Relationen zwischen den Fundamentalgrössen und die partiellen Differentialgleichungen der Fläche durch die Codazzi'schen Formeln, namentlich in der kinematischen Deutung, welche Herr

den integrirenden Factor der Differentialgleichung der Linien von der Länge Null kommt wegen ihres rein analytischen Characters hier nicht in Betracht.

1) Die Erörterungen in Nr. 1. und 2. beabsichtigen nicht, eine Darlegung aller auf das Krümmungsmaass bezüglichen geometrischen Betrachtungen zu geben. Mit Ausnahme der Puiseux'schen Formel, welche dasselbe als Grenzwerth eines von einer Variabeln abhängigen Quotienten darstellt, aber die Construction geodätischer Kreise erfordert, unterliegen alle dem Umstande, dass es sich um das Verhältniss zweier von zwei unabhängigen Variabeln abhängenden infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung handelt, welcher meines Erachtens die geometrische Anschaulichkeit beeinträchtigt.



Darboux[1]) ausführlich in seiner Théorie générale des surfaces dargelegt hat, eine sehr bemerkenswerthe Interpretation erfahren.

Herr Darboux denkt sich in Verbindung mit der Fläche ein rechtwinkeliges Raumcoordinatensystem — trièdre trirectangle — dessen z-Axe die Normale des Flächenpunktes ist, und dessen x-Axe in der Tangentenebene der Fläche einen Winkel m mit der Curve u bildet. Schreitet man auf der letzteren fort, so geht dasselbe in eine benachbarte Lage über. Ist nun $r\,du$ die Rotationscomponente um die z-Axe, welche, abgesehen von einer geeigneten Translation, in Verbindung mit zwei anderen analogen partiellen Rotationen $p\,du$, $q\,du$ um die Axen x und y jenes System aus der ursprünglichen Lage in die zweite überführt, und bezeichnet man mit $r'\,dv$ die dem Fortschreiten auf der Curve v entsprechende Rotationscomponente, so ergiebt sich für den Ausdruck

$$K \sin \alpha \sqrt{e g}$$

— unter α den Winkel der Coordinatenlinien u, v verstanden — die elegante Formel[2])

$$K \sin \alpha \sqrt{e g} = \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r'}{\partial u}$$

Nun hängen freilich die Rotationen r und r', sowie auch die von Herrn Darboux eingeführten Translationscomponenten des Trieders nur vom Längenelemente ab. Sie sind aber nur analytische Invarianten, wie auch schon aus dem Anblick der für K angeführten Formel hervorgeht, welche neben den Differentialquotienten nach u, v auch noch die Coefficienten e, g enthält, während die übrigen in Darboux'

---

1) Leçons sur la théorie générale des surfaces, Tom. I, Tom. II S. 361—387.

1) a. a. O. S. 364.

Theorie auftretenden vier Rotationen überhaupt keinen invarianten Character besitzen.

Nr. 4. Als geometrische Invarianten von wesentlicher Bedeutung kennt man die geodätische Krümmung einer beliebigen auf der Fläche gezogenen Linie, insbesondere die geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien u, v,[1]) mittelst deren allein sich nach Bonnet das Krümmungsmaass in Bezug auf jedes orthogonale Curvensystem auf der Fläche darstellen lässt, wie dies Herr Knoblauch neuerdings wieder hervorgehoben hat.[2]) Bei allgemeiner Wahl des Coordinatensystems reichen aber diese beiden Invarianten nicht mehr aus.

Es ist jedoch leicht, noch andere geometrische Invarianten aufzustellen, welche ebenso wie die geodätischen Krümmungen nur von den e, f, g und den ersten Differentialquotienten derselben abhängen. Eine solche muss nämlich eine Function dieser Grössen sein, welche bei einer Transformation von der Form

$$u = F(u')$$
$$v = \Phi(v')$$

ihre Gestalt nicht ändert, denn nur dann ist sie von der Wahl der Variabeln unabhängig, so lange die Coordinatenlinien nicht geändert werden.

Bezeichnet man nun die Werthe, welche die e, f, g vermöge dieser Transformation annehmen durch e', f', g' und in analoger Weise die Differentialquotienten e_u, $\cdots g_v$ durch $e'_{u'}$, $\cdots g'_{v'}$, so erhält man, wenn die Differentialquotienten der F, Φ durch Striche bezeichnet werden,

---

1) Als Curve u (v) soll hier immer diejenige bezeichnet werden, längs welcher u (v) variabel ist.

2) Vgl. Knoblauch, a. a. O., Darboux, Théor. générale, Tom. III, S. 130.

$$
\begin{aligned}
e' &= e\,F'^2 \\
f' &= f\,F'\,\Phi' \\
g' &= g\,\Phi'^2 \\
f'_{u'} &= f_u\,F'^2\,\Phi' + f\,F''\,F'\,\Phi' \\
f'_{v'} &= f_v\,F'\,\Phi'^2 + f\,\Phi''\,\Phi'\,F' \\
e'_{u'} &= e_u\,F'^3 + 2\,e\,F'^2\,F'' \\
e'_{v'} &= e_v\,F'^2\,\Phi' \\
g'_{u'} &= g_u F'\,\Phi'^2 \\
g'_{v'} &= g_v\,\Phi'^3 + 2\,g\,\Phi'^2\,\Phi''\ ^{1)}
\end{aligned}
$$

Aus diesen neun Gleichungen lassen sich durch Elimination der vier willkürlichen Grössen F', Φ', F'', Φ'' nur fünf von diesen freie Gleichungen zwischen den $e\ f\ g$ und ihren Differentialquotienten herleiten, welche die Transformationsrelationen im Aronhold'schen Sinne darstellen. Beschränkt man sich daher auf solche Verbindungen, welche höchstens erste Differentialquotienten der e, f, g enthalten, so lassen sich nur fünf Invarianten bilden. Es sind dies die folgenden:

$$\frac{f'^2}{e'\,g'} = \frac{f^2}{e\,g},$$

1) Vermöge dieser Transformation ergeben sich für die entsprechenden Coefficienten $[A_1]$, $[C]$ der Gleichungen 3) in Nr. 5 die Beziehungen:

$$[A'] = A\,\frac{F'^2}{\Phi'}, \quad [C] = C\,\frac{\Phi'^2}{F'}.$$

In meiner Arbeit über die Krümmung der Flächen, Klein, Annalen Bd. 39 sind S. 198, Gleichung 13) diese Gleichungen in Folge eines bei der Correctur entstandenen Schreibfehlers unrichtig angegeben, indem auch die Nenner rechterhand zum Quadrat erhoben sind. Derselbe findet sich dann auf Seite 249 wiederholt, während die dort geführte Rechnung die richtigen Werthe von $[A_1]$, $[C]$ zu Grunde legt.

$$\frac{1}{2\sqrt{H'}}\frac{e'_{v'}}{\sqrt{e'}} = \frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{e_v}{\sqrt{e}} = j,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{H'}}\frac{g'_{u'}}{\sqrt{g'}} = \frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{g_u}{\sqrt{g}} = j_1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{H'}}\frac{\partial\frac{f'}{\sqrt{e'}}}{\partial u'} = \frac{1}{\sqrt{H'}}\frac{\partial\frac{f}{\sqrt{e}}}{\partial u} = \varkappa,$$

$$\frac{1}{\sqrt{H'}}\frac{\partial\frac{f'}{\sqrt{g'}}}{\partial v'} = \frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\frac{f}{\sqrt{g}}}{\partial v} = \varkappa_1.$$

wobei $H = eg - f^2$, $H' = e'g' - f'^2$ gesetzt ist. Die erste dieser Gleichungen stellt das Quadrat des Cosinus des Winkels α der Coordinatenlinien vor; in den übrigen erkennt man sofort die Bestandtheile, aus denen die geodätischen Krümmungen γ, γ_1 der Coordinatenlinien u, v sich zusammensetzen, denn es ist bekanntlich

$$\gamma = \varkappa - j,$$
$$\gamma_1 = \varkappa_1 - j_1.$$

Es ist nun zu vermuthen, dass sich aus diesen fünf Invarianten,[1]) zu denen allerdings noch die Bogenlängen der Coordinatenlinien selbst hinzuzunehmen sind, die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie aufbauen lassen werden, wie im folgenden seine Bestätigung finden wird.

Es erweist sich indessen nicht als zweckmässig, jene Invarianten direct einzuführen. Vielmehr wird es sich empfehlen, die bereits definirten Krümmungen γ, γ_1 beizubehalten und diesen diejenigen beiden Biegungsinvarianten hinzuzufügen, welche ich bereits in meiner Arbeit über die

1) Dieselben sind indessen nicht von einander unabhängig. Man vergleiche weiter unten Nr. 6. die Gleichungen 10a und I.



Krümmung der Flächen, allerdings in anderer Richtung, betrachtet hatte.[1])

Nr. 5. Bezeichnet man das Längenelement der Fläche, welche auf zwei willkürliche Curvensysteme u, v bezogen ist, durch

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \tag{1}$$

und die Differentialquotienten der e, f, g sowie der Coordinaten x, y, z, wie in Nr. 4, durch angehängte Indices, so hat man bekanntlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{uu} &= A\,x_u + A_1\,x_v + E p, \\ x_{uv} &= B\,x_u + B_1\,x_v + F p, \\ x_{vv} &= C\,x_u + C_1\,x_v + G p \end{aligned} \tag{2}$$

nebst den analogen für y, z und q, r, wobei E, F, G, die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, p, q, r die Richtungscosinus der Normale bedeuten, und die characteristischen Coefficienten A; A_1; B, B_1; C, C_1 durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2A\;\;H &= g\,e_u - 2f\,f_u + f\,e_v \\ 2A_1 H &= 2e\,f_u - e\,e_v - f\,e_u \\ 2B\;\;H &= g\,e_v - f\,g_u \\ 2B_1 H &= e\,g_u - f\,e_v \\ 2C\;\;H &= 2g\,f_v - g\,g_u - f\,g_v \\ 2C_1 H &= 2\,g_v - 2f\,f_v + f\,g_u \end{aligned} \tag{3}$$

in denen

$$e\,g - f^2 = H$$

gesetzt ist, definirt sind. Dabei finden zwischen den characteristischen Coefficienten die Gleichungen

---

1) Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Klein, Annalen 39. S. 200.

$$B + C_1 = \frac{\partial\, l \sqrt{H}}{\partial v}$$

$$B_1 + A = \frac{\partial\, l \sqrt{H}}{\partial u}$$

$$\text{4)} \qquad A_1 \frac{f}{e} = B_1 - \frac{\partial\, l \sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial u}$$

$$C \frac{f}{g} = B - \frac{\partial\, l \sqrt{\frac{H}{g}}}{\partial v}$$

statt, und zugleich hat man für die Differentialquotienten der p, q, r die Gleichungen

$$\text{5)} \qquad \begin{aligned} p_u &= L\, x_u + L_1\, x_v \\ p_v &= M\, x_u + M_1\, x\,. \end{aligned}$$

in denen

$$\text{6)} \qquad \begin{aligned} L\;\; H &= F f - g E \\ L_1\, H &= E f - F e \\ M\;\; H &= G f - F g \\ M_1\, H &= F f - G e \end{aligned}$$

ist. Die geodätischen Krümmungen γ, γ_1 der Curven u, v sind alsdann

$$\text{7)} \qquad \gamma = \frac{A_1 \sqrt{H}}{e \sqrt{e}}, \quad \gamma_1 = \frac{C \sqrt{H}}{g \sqrt{g}}$$

ihre reciproken Werthe sind die Radien der geodätischen Krümmung der Parameterlinien. Ich denke mir ferner im Punkte $P(x, y, z)$ der Fläche die Tangente an die Curve u gezogen. Die Coordinaten eines um r_1 von P entfernten Punktes auf derselben sind

$$X = x + \frac{r_1 x_u}{\sqrt{e}}$$

$$8) \qquad Y = y + \frac{r_1 y_u}{\sqrt{e}}$$

$$Z = z + \frac{r_1 z_u}{\sqrt{e}}$$

und diejenige Normalebene der Fläche, welche jene Tangente in sich enthält, hat die Gleichung

$$N = \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ p & q & r \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$N = (X-x,\ p,\ x_u) = 0.$$

Hieraus ergibt sich für die unendlich benachbarte Normalebene $N + dN_v$, welche dem Fortschreiten auf der Curve v entspricht, die Gleichung

$$N + [(X-x, p, x_{uv}) + (X-x, p_v, x_u) - (x_v, p, x_u)]\, dv = 0.$$

Trägt man in die letztere die Ausdrücke 8) an Stelle von $X-x, \cdots$ ein, so ergibt sich für die Entfernung, in welcher die Tangente der Curve u von der benachbarten Normalebene längs der Curve v geschnitten wird, die Formel

$$9) \qquad r_1 = -\frac{\sqrt{e}}{B_1}$$

und ebenso erhält man für den analogen Werth r die Gleichung

$$r = -\frac{\sqrt{g}}{B}.$$

Allerdings sind diese „Radien", welche für isometrische Flächen ungeändert bleiben, bisher wie es scheint in der Flächentheorie nicht beachtet worden. Die

folgenden Bemerkungen werden indessen erkennen lassen, dass sie zugleich mit den angegebenen Normalebenen durch die Tangenten der Curven u, v bei vielen Untersuchungen auftreten.

Wie man sieht ist die Construction dieser Radien genau dieselbe, welche die geodätischen Krümmungsradien definirt, in welche sie geradezu übergehen, wenn der Coordinatenwinkel α ein rechter ist. Denn das Centrum der geodätischen Krümmung der Curve v ist, wie man leicht erkennt, derjenige Punkt auf der Normale der Curve v, in der Tangentenebene der Fläche, in dem diese Normale von der unendlich benachbarten Normalebene der Curve v geschnitten wird. Man könnte daher die reciproken Werthe von r und r_1, die fortan durch ϱ, ϱ_1 bezeichnet werden sollen,[1] auch die „nach den Richtungen der Coordinatenlinien gemessenen geodätischen Krümmungen“ der letzteren nennen. Freilich ist nicht sofort geometrisch evident, dass diese Krümmungen ϱ und ϱ_1 für isometrische Flächen ungeändert bleiben. Aber eine solche unmittelbare Evidenz besteht auch nicht für die geodätischen Krümmungen γ und γ_1; man erkennt ihre Invarianz aber leicht mit Hülfe der Liouville'schen Definition der geodätischen Krümmung durch den geodätischen Contingenzwinkel. In derselben Weise aber kann man durch eine infinitesimale Betrachtung sehr einfacher Art nachweisen, dass r und r_1 Biegungsinvarianten sind. Es möge genügen, was diesen Punkt betrifft, auf die Formeln 10*) zu verweisen, deren geometrische Deutung auf der Hand liegt, und aus denen jener invariante Character für r und r_1 sich unmittelbar ergibt.

---

1) Nach der Bezeichnung in Nr. 4 ist

$$\varrho = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha\, j - j_1),$$
$$\varrho_1 = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha\, j_1 - j).$$



Eine besonders anschauliche Bedeutung gewinnen die Endpunkte der Strecken r, r_1 für ein conjugirtes Coordinatensystem auf der Fläche; sie sind dann die Durchschnittspunkte der consecutiven Tangenten der Curven u (v) längs der Curven v (u). Bei einer isometrischen Beziehung entspricht nun freilich einem conjugirten Coordinatensystem nicht wieder im allgemeinen ein solches; doch mag hier bemerkt werden, dass zwei isometrisch auf einander bezogene Flächen positiver Krümmung immer auch reell so auf einander bezogen werden können, dass einem System conjugirter Curven wieder ein solches entspricht, während für Flächen negativer Krümmung dieses System auch imaginär werden kann.[1])

Die Normalebenen N längs der Curve v erzeugen eine abwickelbare Fläche. Ist nun ϱ_1 beständig gleich Null, so laufen die Erzeugenden derselben den Tangenten der Curven u in den Punkten der Curven v parallel. Sind beide Krümmungen ϱ und ϱ_1 beständig gleich Null, so ist das Curvensystem u, v ein äquidistantes, denn alsdann hönnen e und g gleich Eins gesetzt werden.

Es möge hier noch darauf hingewiesen werden, dass auch die Entfernungen s, s_1, in denen die Normale der Fläche von den consecutiven Normalebenen N der Cnrven u, v geschnitten wird, eine einfache Bedeutung besitzen. Setzt man nämlich in der Gleichung $N + d\,N_v = 0$ für $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ die Grössen $s_1 p$, $s_1 q$, $s_1 r$ ein, so ergiebt sich

$$s_1 (p\, p_v\, x_u) - (x_v\, p\, x_u) = 0$$

1) Für dieses besondere Coordinatensystem gehen dann durch die Biegung gleichzeitig die aus den Tangenten der Curven u, v gebildeten zwei Schaaren Developpabeln in einander über. Dagegen können die geodätischen Krümmungsradien einer Curve nur dann eine Developpable bilden, wenn dieselbe eine Krümmungslinie ist.

oder wenn man für p_v seinen Werth aus 5) substituirt

$$\frac{1}{s_1} = \frac{eG - fF}{eg - f^2}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{gE - fF}{eg - f^2}$$

Daher ist $\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}$ für jeden Punkt der Fläche unveränderlich und gleich der Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien,[1]) während für conjugirte Coordinatensysteme noch ausserdem

$$\frac{1}{ss_1} = \frac{K}{\sin^2 \alpha}$$

wird.

Nr. 6. Die vier Biegungsinvarianten $\gamma\ \gamma_1\ \varrho\ \varrho_1$ sollen nun im folgenden zur Bildung des Krümmungsmaasses verwandt werden. Hierzu sind zunächst einige weitere Formeln zu entwickeln.

Setzt man nämlich

$$\cos \alpha = \frac{f}{\sqrt{eg}}$$

so erhält man leicht mit Hülfe der Gleichungen 3)

$$-\sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{eCH + B_1 gH}{eg\sqrt{eg}}$$

oder

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{C\sqrt{H}}{g} + \frac{B_1 \sqrt{H}}{e}$$

und wenn man hier γ_1 und ϱ_1 einführt

1) Für orthogonale Systeme gehen s und s_1 in die Normalkrümmungen über, und man erhält den bekannten Satz über die Krümmungen zweier zu einander rechtwinkligen Normalschnitte.



$$10)\quad \begin{aligned} -\frac{\partial\alpha}{\partial v} &= \sqrt{g}(\gamma_1 - \varrho_1 \sin\alpha) = \sqrt{H}\left(\frac{C}{g} + \frac{B_1}{e}\right) \\ -\frac{\partial\alpha}{\partial u} &= \sqrt{e}(\gamma - \varrho \sin\alpha) = \sqrt{H}\left(\frac{A_1}{e} + \frac{B}{g}\right) \end{aligned}$$

oder, wenn man die Bogenelemente $ds = \sqrt{e}\,du$, $ds_1 = \sqrt{g}\,dv$ einsetzt

$$10^*)\quad \begin{aligned} -\frac{\partial\alpha}{\partial s} &= \gamma - \varrho \sin\alpha \\ -\frac{\partial\alpha}{\partial s_1} &= \gamma_1 - \varrho_1 \sin\alpha \end{aligned}$$

Die vier Grössen $\varrho, \varrho_1, \gamma, \gamma_1$ sind indessen noch durch eine weitere Gleichung mit einander verbunden. Man erhält dieselbe durch Bildung der Integrabilitätsbedingung der Gleichungen 10). Aus den Gleichungen 9) oder

$$\varrho = -\frac{B}{\sqrt{g}}, \quad \varrho_1 = -\frac{B_1}{\sqrt{e}}$$

folgt nämlich mit Hülfe der in 3) gegebenen Ausdrücke für B und B_1

$$11)\quad \begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} &= \varrho + \varrho_1 \cos\alpha \\ -\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} &= \varrho_1 + \varrho \cos\alpha \end{aligned}$$

also, wenn man die Gleichungen 10) nach u und v differentiirt und die Ausdrücke 11) auf der rechten Seite substituirt,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v\sqrt{eg}} &= \frac{\partial\gamma_1}{\partial s} - \frac{\partial\varrho_1}{\partial s}\sin\alpha + (\varrho_1\gamma - \varrho\gamma_1)\cos\alpha - \varrho_1\gamma_1 + \varrho_1^2\sin\alpha \\ &= \frac{\partial\gamma}{\partial s_1} - \frac{\partial\varrho}{\partial s_1}\sin\alpha - (\varrho_1\gamma - \varrho\gamma_1)\cos\alpha - \varrho\gamma + \varrho^2\sin\alpha\text{[1]}. \end{aligned}$$

1) Sind zwei Flächen so auf einander bezogen, dass der Coordinatenwinkel α und die vier Grössen $\varrho, \varrho_1, \gamma, \gamma_1$ in correspondirenden

Setzt man zur Abkürzung

$$12)\qquad \frac{\gamma_1}{\sin\alpha} - \varrho_1 = k_1, \quad \frac{\gamma}{\sin\alpha} - \varrho = k$$

$$\gamma \operatorname{cotg}\alpha + \varrho_1 = l_1, \quad \gamma_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 + \varrho = l$$

so kann man diese Identität in der folgenden Form

$$\mathrm{I)}\qquad \frac{\partial k_1}{\partial s} - k_1 l_1 = \frac{\partial k}{\partial s_1} - k l$$

schreiben, deren beide Seiten nach 10*) verschwinden, wenn der Winkel α constant ist.

Nr. 7. Ich gehe nun von dem bekannten Ausdrucke[1]) für das Krümmungsmaass K aus,

---

Punkten gleiche Werthe haben, so **sind sie isometrisch.** Denn aus den Gleichungen 10a) folgt zunächst die Gleichung der Bogenelemente, also

$$\sqrt{e} = \sqrt{e'}$$
$$\sqrt{g} = \sqrt{g'}$$

und somit auch $f = f'$, falls man die Coefficienten des Längenelementes auf den beiden Flächen durch Indices unterscheidet. **Hierbei muss aber vorausgesetzt werden, dass α nicht constant ist.** Denn in diesem Falle sind die Grössen ϱ, ϱ_1 von den geodätischen Krümmungen γ, γ_1 nur um einen constanten Factor verschieden. **Es ist aber leicht zu sehen, dass aus der Gleichheit der geodätischen Krümmungen bei constantem Coordinatenwinkel keineswegs die Gleichheit der Längenelemente sondern nach 11) nur die Relationen folgen:**

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial l\sqrt{g}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e'}}\frac{\partial l\sqrt{g'}}{\partial u}$$
$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial l\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{g'}}\frac{\partial l\sqrt{e'}}{\partial v}.$$

Ist dagegen α eine Function von v allein, so ergiebt sich zunächst $\sqrt{g} = \sqrt{g'}$ und dann nach 11) auch $\sqrt{e} = \sqrt{e'}$, so dass in diesem Falle die Flächen wieder isometrisch sind.

1) Darboux, a. a. O. Tom II p. 364.



$$K\sqrt{H} = -\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} - \cos\alpha\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}}{\sqrt{e}\sin\alpha}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} - \cos\alpha\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}}{\sqrt{g}\sin\alpha}\right)$$

den man vermöge der Gleichungen 3) in die Form

$$\text{II)} \qquad K\sqrt{H} = -\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_1\sqrt{H}}{e}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B\sqrt{H}}{g}\right)$$

oder auch, wenn man die Formeln 10) einführt in die Gestalt

$$\text{II')} \qquad K\sqrt{H} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C\sqrt{H}}{g}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_1\sqrt{H}}{e}\right)$$

bringen kann. Durch Addition ergiebt sich der von dem zweiten partiellen Differentialquotienten von α nach u und v befreite Ausdruck

$$\text{II'')} \quad 2K\sqrt{H} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C}{g} - \frac{B_1}{e}\right)\sqrt{H} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_1}{e} - \frac{B}{g}\right)\sqrt{H}$$ [1])

Nun findet man leicht nach 7) und 9)

$$\frac{C}{g} - \frac{B_1}{e} = \left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} + \varrho_1\right)\sqrt{\frac{1}{e}}$$
$$\frac{A_1}{e} - \frac{B}{g} = \left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} + \varrho\right)\sqrt{\frac{1}{g}}$$

1) Die Formeln II, II' lassen unmittelbar die bekannten Eigenschaften der Curvatura integra von Flächenstücken, die von geodätischen oder von äquidistanten Linien begrenzt sind, erkennen. Formel II'' ist nichts anderes als der von Herrn Weingarten für das Krümmungsmaass bemerkte Ausdruck. (Festschrift der Technischen Hochschule, Berlin 1884; Knoblauch, Theorie der krummen Flächen, S. 177).

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \frac{\partial \sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial u} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\sqrt{eg}\,\partial u} + \operatorname{cotg}\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial s} = -(\varrho_1 + \operatorname{cotg}\alpha\,\gamma)$$

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \frac{\partial \sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{e}}{\sqrt{eg}\,\partial v} + \operatorname{cotg}\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = -(\varrho + \operatorname{cotg}\alpha\,\gamma_1)$$

und somit durch Substitution in die Formel II″)

$$2K = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} + \varrho_1\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} + \varrho\right)$$
$$-\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} + \varrho_1\right)(\varrho_1 + \operatorname{cotg}\alpha\gamma) - \left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} + \varrho\right)(\varrho + \operatorname{cotg}\alpha\gamma_1)$$

oder mit Benutzung der unter 12) eingeführten Bezeichnung sowie der folgenden

$$\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} + \varrho_1 = h_1, \quad \frac{\gamma}{\sin\alpha} + \varrho = h$$

$$\text{III)} \qquad 2K = \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s_1} - h_1 l_1 - h\,l.$$

In dieser Form, der man durch die mittelst der Formel I mögliche Elimination des Winkels α, solange dieser nicht constant ist, auch eine solche Gestalt geben kann, dass K nur von den γ, ϱ und γ_1, ϱ_1, sowie den ersten Differentialquotienten dieser Grössen bezüglich nach v und u abhängig erscheint, erhält nun der Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses seinen unmittelbarsten Ausdruck im analytisch geometrischen Sinne, da K nur durch geometrische Biegungsinvarianten dargestellt ist. Ebenso merkwürdig ist aber die andere aus der bekannten Bedeutung von K als reciprokes Product der Hauptkrümmungshalbmesser fliessende Eigenschaft, der zufolge die rechte Seite von III für alle Coordinatensysteme auf der Fläche für jeden Punkt einen unveränderlichen Werth hat,

und die Gleichungen 10ᵃ), I, III stellen nichts anderes vor, als ganz allgemeine Theoreme, die von jedem beliebigen Coordinatensysteme auf einer Oberfläche gelten.

Ist insbesondere der Winkel α constant, so wird nach 10ᵃ)

$$\varrho = \frac{\gamma}{\sin\alpha}, \; \varrho_1 = \frac{\gamma_1}{\sin\alpha}$$

mithin

$$h_1 = 2\varrho_1, \qquad h = 2\varrho$$
$$l = \varrho + \varrho_1 \cos\alpha, \; l_1 = \varrho_1 + \varrho\cos\alpha$$

also in diesem Falle

$$\text{III}') \quad K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} + \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - (\varrho_1^2 + \varrho^2 + 2\varrho\varrho_1\cos\alpha)$$

welche Formel für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in die bekannte Bonnet'sche übergeht.[1])

Nr. 8. Ich schliesse hieran noch einige Bemerkungen, die sich aus der Form der Gleichungen I und III ergeben.

Sind die Curven u, v geodätisch, so folgt durch Combination von I und III

$$K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} - \varrho_1^2 = \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - \varrho^2$$

Bei constanter negativer Krümmung $K = -c^2$ wird daher

1) Will man das Krümmungsmaass nur durch die geodätischen Krümmungen und den Winkel α darstellen, so findet man aus II'

$$K = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v}\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{eg}} + \frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial s_1} - (g_1^2 + g^2 + 2\cos\alpha\, g g_1)$$
$$- \frac{g_1}{\sin\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} - \frac{g}{\sin\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

falls $\gamma = \sin\alpha\, g$, $\gamma_1 = \sin\alpha\, g_1$ gesetzt wird. Wie man sieht, ist dies aber keine Darstellung durch geometrische Invarianten, da die Differentiation nach u und v sich nicht beseitigen lässt.

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1^2 - c^2}} = \sqrt{e}$$

oder, wenn man bei constanten v integrirt

$$\frac{\varrho_1 + c}{\varrho_1 - c} = e^{2sc}\,\psi(v)$$

und analog

$$\frac{\varrho + c}{\varrho - c} = e^{2s_1c}\,\chi(u)$$

Bei constanter positiver Krümmung $K = + c^2$ findet man dagegen

$$\varrho_1 = c \operatorname{tg}(cs + f(v))$$
$$\varrho = c \operatorname{tg}(cs_1 + \varphi(u))$$

welche Formeln in sehr einfacher Weise die Aenderungen von ϱ_1 (und ϱ) beziehungsweise längs der geodätischen Linien u (und v) darstellen.

Ein ganz ähnliches Resultat ergiebt sich für ein System von Curven, in Bezug auf das $\gamma = 0$, $\varrho = 0$ ist. Man erhält dann aus I und III

$$K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} - \varrho_1^2$$

und damit bei constantem K eine ganz ähnliche Gleichung für ϱ, wie vorhin, während γ_1 nun durch die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial u} = \sqrt{e}\,(\gamma_1 \varrho_1 + \sin \alpha K)$$

in der überdies nach 10*) α nur von v abhängig ist, characterisirt ist, deren Lösung sofort hingeschrieben werden kann.

Dagegen können γ und ϱ_1 nur bei developpabelen Flächen gleich Null sein. Denn die Combination der Gleichungen I und III liefert hier sogleich $K = 0$.

Ferner ergiebt sich aus III der Satz:



Eine reelle Fläche, auf der ein System von Coordinatenlinien constanter geodätischer Krümmung[1]) existirt, die sich überall unter constantem Winkel α schneiden, ist eine Fläche constanter negativer Krümmung, den man als Verallgemeinerung eines bekannten Liouville'schen Theorem's betrachten kann.

Sollen z. B. die geodätischen Krümmungen der Curven u und v eines Orthogonalsystems constant und gleich c und c_1 sein, so hat man nach Nr. 5), 7) die Gleichungen

$$\frac{e_v}{e\sqrt{g}} = 2\,c\,, \quad \frac{g_u}{g\sqrt{e}} = 2\,c_1$$

deren Lösungen

$$\sqrt{e} = -\frac{\psi'(u_1)}{\psi(u_1) + \chi(v_1)}, \quad \sqrt{g} = -\frac{\chi'(v_1)}{\psi(u_1) + \chi(v_1)}$$

sind, wenn $c\,v = v_1$, $c_1 u = u_1$ gesetzt wird. Das Längenelement wird demnach

$$ds^2 = \frac{\dfrac{d\,U^2}{c_1^{\,2}} + \dfrac{d\,V^2}{c^2}}{(U+V)^2}$$

wenn $U = \psi(u_1)$, $V = \chi(v_1)$ gesetzt wird. Mit Hülfe der Identität

$$\frac{1}{c_1^{\,2}}\,d\,U^2 + \frac{1}{c^2}\,d\,V^2 = \frac{d\,U^2 + d\,V^2 + \left(\frac{c}{c_1}\,dU - \frac{c_1}{c}\,dV\right)^2}{c^2 + c_1^{\,2}}$$

und der Bezeichnungen

1) Solche Curven nennt Herr Darboux, allerdings im Gegensatz mit der durch Gauss eingeführten Terminologie, „geodätische Kreise“. Will man sich dieser Bezeichnung anschliessen, so dürfte es sich in Bezug auf die Deformation der Flächen empfehlen, die Gauss'schen geodätischen Kreise schlechthin „Kreise“ zu nennen.

$$U + V = U', \quad \frac{c}{c_1} U - \frac{c_1}{c} V = V'$$

gewinnt dasselbe die Gestalt

$$ds^2 = \frac{d\,U'^2 + d\,V'^2}{U'^2\,(c_1^2 + c^2)}$$

in welcher man sofort das Längenelement der auf ihre Meridiane und Parallelkreise bezogenen Rotationsfläche der Tractrix erkennt. In ähnlicher Weise lässt sich übrigens auch der Fall eines beliebigen constanten α behandeln.

Nr. 9. Die Formel III Nr. 7. für das Krümmungsmaass enthält neben den Invarianten h und h_1 noch die Differentialquotienten derselben nach v und u. Nur für eine gewisse Klasse von Coordinatensystemen auf einer krummen Fläche wird man daher K durch die Invarianten allein darstellen können, so, dass dann K nur aus den geometrischen Grössen ϱ, ϱ_1, γ, γ_1, α zusammengesetzt ist. Es sind dies diejenigen, für welche h und h_1 Functionen von u und v allein werden, oder mit unwesentlicher Aenderung

$$\sin^2\alpha\left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} + \varrho\right), \quad \sin^2\alpha\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} + \varrho_1\right)$$

d. h.

$$\frac{1}{c\sqrt{g}}\left[f_u - e_v + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{g}{e}}{\partial u}\right], \quad \frac{1}{g\sqrt{e}}\left[f_v - g_u + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{e}{g}}{\partial v}\right]$$

von u und v allein abhängig sind. Da diese beiden Ausdrücke bei einer Transformation von der Form

$$u' = \varphi(u), \quad v' = \psi(v)$$

absolute Invarianten sind, so erscheinen die Coordinatensysteme dieser Art durch die folgenden beiden Gleichungen characterisirt,

$$\frac{1}{g\sqrt{e}}\left(f_v - g_u + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{e}{g}}{\partial v}\right) = \alpha v + \beta$$

$$\frac{1}{e\sqrt{g}}\left(f_u - e_v + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{g}{e}}{\partial u}\right) = \alpha_1 u + \beta_1$$

in denen α, α_1, β, β_1 Constanten bedeuten, die man gleich Null oder Eins setzen kann, je nachdem die linken Seiten constant oder variabel sein sollen. Die Differentialgleichungen, auf deren Lösung die Bestimmung der Coordinatensysteme beruht, für welche die angegebene Eigenschaft besteht, sind allerdings nicht ganz einfach, und ich werde sie hier nicht weiter untersuchen. Eine einfache Lösung ergiebt sich aber in dem Falle, wo man sämmtliche Constanten gleich Null setzt, der freilich nur bei einer developpabelen Fläche auftreten kann. Alsdann kommt die bezeichnete Aufgabe auf die folgende hinaus:

Alle Curvensysteme in der Ebene zu bestimmen, für die die beiden Ausdrücke

$$f_v - g_u + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{e}{g}}{\partial v}, \quad f_u - e_v + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{g}{e}}{\partial u}$$

verschwinden.

Setzt man demgemäss

$$e = x_u^2 + y_u^2, \quad f = x_u x_v + y_u y_v, \quad g = x_v^2 + y_v^2$$

so erhält man durch einfache Umformungen an Stelle dieser beiden Bedingungen die Gleichungen

$$13)\quad \begin{cases} x_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{x_v}{x_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial v} + y_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{y_v}{y_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial v} = 0 \\[2ex] x_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{x_v}{x_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial u} + y_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{y_v}{y_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$\frac{x_v}{x_u}\sqrt{\frac{e}{g}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{y_u}{x_u}\right)^2}{1+\left(\frac{y_v}{x_v}\right)^2}} = p$$

$$\frac{y_v}{y_u}\sqrt{\frac{e}{g}} = \frac{\frac{y_v}{x_v}}{\frac{y_u}{x_u}}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{y_u}{x_u}\right)^2}{1+\left(\frac{y_v}{x_v}\right)^2}} = q$$

und

$$z = \frac{y_u}{x_u}, \quad z' = \frac{y_v}{x_v}$$

so folgt aus dem nach 13) erforderlichen Verschwinden der Functionaldeterminante

$$\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}$$

dass p nur von q abhängig ist, oder

$$\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z'^2}} = \Phi\left(\frac{z'}{z}\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z'^2}}\right)$$

oder auch

$$z' = F(z)$$

sein muss, wo F eine noch zu bestimmende Function bedeutet. Die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{1+z^2}{1+(Fz)^2}}\right) + z^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{1+z^2}{1+(Fz)^2}}\right) = 0$$

auf welche sich die beiden 13) reduciren, verwandelt sich durch Ausführung der Differentiation und nach einigen Vereinfachungen in

$$[z - F(z)]\left[\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+(Fz)^2}\frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0$$

Da nun die Gleichung

$$z - F(z) = \frac{y_u x_v - y_v x_u}{x_u x_v} = 0$$

nicht bestehen kann, weil sonst y eine Function von x sein würde, so ergiebt sich nur

$$\frac{dz}{1+z^2} + \frac{dF}{1+F^2} = 0$$

oder

$$\operatorname{arc\,tg} z + \operatorname{arc\,tg} z' = \text{const.}$$

Zwischen den Winkeln α und β, welche die Curven u, v in jedem Punkte mit der x-Axe bilden, muss daher die Gleichung

$$\alpha + \beta = \text{const}$$

erfüllt sein. Man erhält also alle Systeme der verlangten Art, wenn man die eine Schaar von Curven beliebig annimmt und zu derselben eine zweite so bestimmt, dass die Winkelhalbirende des von den Curven beider Schaaren in jedem Punkte gebildeten Winkels eine constante Richtung hat.

Allerdings ist in der vorhergehenden Betrachtung vorausgesetzt, dass x_u und y_u nicht Null sind. Ist aber z. B. x_u gleich Null, so kann nicht zugleich y_u gleich Null sein, da sonst eine Gleichung zwischen x und y bestände. Der Fall $x_u = 0$ kann aber stets durch eine Coordinatentransformation beseitigt werden und ist daher in der vorigen Untersuchung schon enthalten.

Nr. 10. Durch das vorstehende haben zugleich die Coefficienten A_1, C, B, B_1 in den Formeln 1) der Nr. 5 ihre geometrische Bedeutung erhalten. Die Coefficienten A und C_1 haben dagegen überhaupt keine geometrische Bedeutung,

und es wird sich daher empfehlen, sie ganz aus diesen Formeln zu entfernen, was vermöge der Gleichungen[1])

$$\frac{A}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u} = -\gamma \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\frac{C}{\sqrt{g}} - \frac{1}{g}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial v} = -\gamma_1 \operatorname{cotg} \alpha$$

zu geschehen hat. Alsdann treten in den Gleichungen 2) nicht mehr die Differentialquotienten der x, y, z, sondern nur die Richtungscosinus der Coordinatenlinien

$$\cos\lambda = \frac{x_u}{\sqrt{e}}, \quad \cos\mu = \frac{y_u}{\sqrt{e}}, \quad \cos\nu = \frac{z_u}{\sqrt{e}}$$

$$\cos\lambda' = \frac{x_v}{\sqrt{g}}, \quad \cos\mu' = \frac{y_v}{\sqrt{g}}, \quad \cos\nu' = \frac{z_v}{\sqrt{g}}$$

auf. Sie erhalten nach einfacher Umrechnung, wenn zugleich wie bisher statt der Differentiale $\sqrt{e}\,du$, $\sqrt{g}\,dv$ die Bogenelemente ds, ds' geschrieben und statt der nunmehr in diese Formeln eingehenden Grössen

$$\frac{E}{e}, \quad \frac{F}{\sqrt{eg}}, \quad \frac{G}{g}$$

die Zeichen

$$R, \quad S, \quad R'$$

gesetzt werden, die folgende Gestalt

$$14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} &= -\frac{\gamma}{\sin\alpha}(\cos\lambda\cos\alpha - \cos\lambda') + p\,R \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} &= -\frac{\gamma'}{\sin\alpha}(\cos\lambda'\cos\alpha - \cos\lambda) + p\,R' \end{aligned}$$

1) Es sind dies die bekannten Gleichungen

$$A e + A_1 f = \frac{e_u}{2},$$

$$C_1 g + C f = \frac{g_v}{2}.$$



$$14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} = \varrho_1 (\cos\lambda \, \cos\alpha - \cos\lambda') + p\,S \\ \dfrac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} = \varrho \, (\cos\lambda' \cos\alpha - \cos\lambda\,) + p\,S \end{cases}$$

nebst den analogen Gleichungen für $\cos\mu$ und $\cos\nu$, wo gleichzeitig rechterhand p durch q und r zu ersetzen ist. Die beiden letzten Gleichungen in 14) treten übrigens an Stelle der einen Gleichung für x_{uv}.

Die Grössen

$$\frac{\cos\lambda\cos\alpha - \cos\lambda'}{\sin\alpha}, \quad \frac{\cos\mu\cos\alpha - \cos\mu'}{\sin\alpha}, \quad \frac{\cos\nu\cos\alpha - \cos\nu'}{\sin\alpha}$$

und die aus ihnen durch Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Cosinus hervorgehenden, welche rechterhand in 14) ausschliesslich vorkommen, haben eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Sie sind nämlich die Richtungscosinus der geodätischen Krümmungsradien der Curven u und v. Bezeichnet man dieselben durch

$$\begin{matrix} \cos l\,, & \cos m\,, & \cos n \\ \cos l', & \cos m', & \cos n' \end{matrix}$$

so erhält man an Stelle von 14)

$$15)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} = -\gamma\,\cos l + p\,R \\ &\frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} = -\gamma_1 \cos l' + p\,R' \\ &\begin{cases} \dfrac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} = \varrho_1 \cos l\,\sin\alpha + p\,S \\ \dfrac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} = \varrho\,\cos l' \sin\alpha + p\,S. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Gleichung für das Krümmungsmaass wird nun

$$16)\quad R\,R' - S^2 = K \sin^2\alpha$$

und zugleich ergeben sich aus den beiden Differentialgleichungen zwischen den Fundamentalgrössen E, F, G[1])

$$BF + B_1 G - CE - FC_1 + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

$$B_1 F + BE - A_1 G - FA + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} = 0$$

die beiden neuen Gleichungen

$$\begin{aligned} & -2\varrho S + \cos\alpha\, S\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} - \varrho_1\right) \\ & + R_1(\varrho_1 + 2\varrho\cos\alpha) - \frac{\gamma_1}{\sin\alpha}R + \frac{\partial S}{\partial s'} - \frac{\partial R'}{\partial s} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} & -2\varrho' S + \cos\alpha\, S\left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} - \varrho\right) \\ & + R(\varrho + 2\varrho_1\cos\alpha) - \frac{\gamma}{\sin\alpha}R' + \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{\partial R}{\partial s'} = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen 15), 16), 17) stellen die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie in einer Form vor, bei der bis auf die Grössen R, R', S nur invariante Elemente der Coordinatenlinien benutzt sind. Dabei bedeuten R, R' die Normalkrümmungen der Coordinatenlinien. Für S erhält man dagegen eine geometrische Deutung durch den Begriff der von Aoust eingeführten Seitenkrümmung (Courbure inclinée).[2])

Bezeichnet man nämlich die Richtungscosinus der Hauptnormale der Curve u durch $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, den Krümmungshalbmesser durch r, so ist

$$r\frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} = \cos a,\quad r\frac{\partial \cos\mu}{\partial s} = \cos b,\quad r\frac{\partial \cos\nu}{\partial s} = \cos c$$

1) Vgl. meine Arbeit in Klein's Annalen 39 S. 185.

2) Man vergl. namentlich Aoust, Théorie des coordonnées curvilignes quelconques; Annali di Matematica, Ser. II 1, S. 39, oder das Referat im Bd. I der Fortschritte der Mathematik.

oder nach 15)

$$\frac{1}{r^2} = \gamma^2 + R^2$$

$$\frac{1}{r_1^2} = \gamma_1^2 + R'^2$$

Unter dem Radius σ' der Seitenkrümmung der Curve u versteht man analog nach Aoust das Element der Curve v dividirt durch den unendlich kleinen Winkel, welchen die Tangente der Curve u beim Fortschreiten auf der Curve v mit ihrer ursprünglichen Richtung bildet. Demnach ist

$$\sigma' \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} = \cos L', \quad \sigma' \frac{\partial \cos\mu}{\partial s'} = \cos M', \quad \sigma' \frac{\partial \cos\nu}{\partial s'} = \cos N'$$

wobei $\cos L'$, $\cos M'$, $\cos N'$ die Richtungscosinus des Radius der Seitenkrümmung vorstellen. Hieraus folgt

$$\frac{1}{\sigma'^2} = S^2 + \varrho_1^2$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = S^2 + \varrho^2 \text{ [1]}$$

und zugleich

$$\sigma' \left(p \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} + q \frac{\partial \cos\mu}{\partial s'} + r \frac{\partial \cos\nu}{\partial s'}\right) = \cos(N, \sigma')$$

$$\sigma \left(p \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} + q \frac{\partial \cos\mu'}{\partial s} + r \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s}\right) = \cos(N, \sigma)$$

oder nach 15)

$$\sigma' S = \cos(\sigma', N)$$

$$\sigma\ S = \cos(\sigma, N)$$

Aus diesen letzteren Gleichungen folgt der Satz von Aoust,

---

1) Es ist also auch

$$\frac{1}{\sigma'^2} - \frac{1}{\sigma^2} = \varrho_1^2 - \varrho^2$$

bei der Isometrie invariant.

dass die beiden nach der Normale N der Fläche gemessenen Seitenkrümmungen der Coordinatenlinien unter einander gleich und gleich S sind.

Die Gleichungen 15) sind in mehrfacher Hinsicht geometrisch deutbar, wenn man die $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ als Coordinaten eines Punktpaares ansieht, welches auf der Kugel von Radius Eins dem betrachteten Flächenpunkte zugeordnet ist. Ohne auf diese Beziehungen weiter einzugehen, sei nur die Gleishung [1])

$$18)\qquad \begin{aligned} &\sum \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s}\frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} - \sum \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s'}\frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} \\ &= \sin^2\alpha\left[K + \cos\alpha\left(\frac{\gamma\gamma_1}{\sin\alpha} - \varrho\varrho_1\right)\right] \end{aligned}$$

bemerkt, nach welcher die linke Seite ebenfalls eine Biegungsinvariante ist, welche nach 10^a) bei constantem Coordinatenwinkel α in das mit $\sin^2\alpha$ multiplicirte Krümmungsmaass übergeht. Unter Bezugnahme auf die in dieser Nummer

1) Beiläufig mögen noch die folgenden beiden Gleichungen hier erwähnt werden. Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ \cos l & \cos m & \cos n \\ \cos l' & \cos m' & \cos n' \end{vmatrix}$$

durch Δ, so sind

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} & \frac{\partial \cos\mu}{\partial s} & \frac{\partial \cos\nu}{\partial s} \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} & \frac{\partial \cos\mu'}{\partial s'} & \frac{\partial \cos\nu'}{\partial s'} \end{vmatrix} = \varrho\varrho_1$$

$$\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} & \frac{\partial \cos\mu}{\partial s'} & \frac{\partial \cos\nu}{\partial s'} \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} & \frac{\partial \cos\mu'}{\partial s} & \frac{\partial \cos\nu'}{\partial s} \end{vmatrix} = \gamma\gamma_1\sin^2\alpha$$

zwei Biegungsinvarianten.

eingeführten Krümmungsradien und ihre Richtungen kann man für die linke Seite auch setzen

$$\frac{1}{rr_1}\cos(rr_1) - \frac{1}{\sigma\sigma'}\cos(\sigma\sigma').$$

An Stelle der Gleichungen 5) Nr. 5. treten endlich die Folgenden

$$19)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s} &= \frac{S\cos l + R\cos l'}{\sin\alpha} \\ \frac{\partial p}{\partial s'} &= \frac{S\cos l' + R'\cos l}{\sin\alpha} \end{aligned}$$

Die Gleichungen 14—19) zeigen, dass von dem hier verfolgten Gesichtspunkt aus der Begriff der Seitenkrümmung ein wesentlicher ist, dass aber alle weiteren Relationen über Krümmungscomponenten, wie sie namentlich Aoust in grosser Zahl aufgestellt hat, nur einen secundären Werth besitzen. Sind diese Gleichungen auch für die directe Anwendung auf Probleme der Flächentheorie vielleicht weniger geeignet, da man fast immer die Differentiationen nach den Bogenelementen ds, ds' durch solche nach du, dv wird ersetzen müssen, so geben sie doch, wie aus den vorigen Betrachtungen ersichtlich sein wird, zu mehrfachen neuen Anschauungen und Fragen Veranlassung, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen hoffe.

Sitzung vom 11. Juni 1892.

1. Herr LUDWIG BOLTZMANN hält einen Vortrag: „über ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen".

2. Herr PAUL GROTH theilt die Resultate von Versuchen „über Auflösung und Wachsthum der Krystalle" mit, welche Herr A. C. GILL im mineralogischen Laboratorium der k. Akademie angestellt hat.

3. Herr ADOLF v. BAEYER spricht „über die Synthese des Dihydrobenzols", über welche er an anderer Stelle ausführlicher berichten wird.

Ueber ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen.

Teil I.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 11. Juni.)

Wir denken uns einen feinen, mit Masse und Trägheit (aber nicht mit Gewicht) begabten Stoff und nennen denselben Kürze halber den Aether. Er soll alle Körper und auch das sogenannte Vacuum durchdringen. Ob die Eigenschaften, welche wir demselben beilegen werden, durch eine Molekularstructur verwirklicht werden können, lassen wir

dahingestellt und denken uns den Aether vorläufig als Continuum, ganz in demselben Sinne, wie **Kirchhoff** in den Kapiteln über Elasticitätslehre und Hydromechanik seiner Vorlesungen über mathematische Physik die ponderable Materie auffasst. Wir setzen überall Isotropie voraus, schliessen also Krystalle vorläufig aus. Wo nicht gerade electromotorische Kräfte thätig sind, soll der Aether nach denselben Gesetzen, wie eine incompressible Flüssigkeit strömen; zu den Kräften, welche in einer solchen wirksam sind, soll aber noch zweierlei hinzukommen:

1. Soll er an jeder Stelle (vielleicht durch die daselbst befindliche ponderable Materie, aber auch im sogenannten Vacuum) einen Widerstand erfahren, welcher der Geschwindigkeit an dieser Stelle proportional und entgegengesetzt gerichtet ist. Die hierdurch verrichtete Arbeit soll in (Joule'sche) Wärme verwandelt werden.

2. Soll an jeder Stelle ein Drehmoment auf das daselbst befindliche Volumelement des Aethers wirken, welches der gesammten Verdrehung desselben proportional und entgegengesetzt gerichtet ist. Ich schliesse mich hierin vollkommen den Ideen Thomson's[1]) an; der Begriff der Drehung eines Volumelementes ist dabei in dem von **Stokes** und **Helmholtz** gebrauchten Sinne zu verstehen.[2])

Wir setzen zunächst voraus, dass die ponderable Materie ruhe und bezeichnen mit F, G, H die Verschiebungen, mit φ, χ, ψ die Geschwindigkeitscomponenten irgend eines Aetherteilchens mit den Coordinaten x, y, z zur Zeit t in den Coordinatenrichtungen. Dann sind:

1) Sir W. Thomson, math. and phys. papers 3. art 99.

2) **Stokes**, on the Theories of the internal friction of fluids in motion etc., Trans. Cambr. Phil. soc. April 1845.

Helmholtz, über die Integrale der hydrodyn. Gleichungen, welche Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle's Journal Bd. 55.

Kirchhoff, 10. Vorlesung über Mechanik. Teubner 1883.

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{d\,H}{d\,y} - \frac{d\,G}{d\,z} \\ b &= \frac{d\,F}{d\,z} - \frac{d\,H}{d\,x} \\ c &= \frac{d\,G}{d\,x} - \frac{d\,F}{d\,y} \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

die doppelten Drehungen eines daselbst befindlichen Volumelementes des Aethers. Gemäss unserer Annahme wirken daher auf das Volumelement die Drehmomente:

$$\frac{a\,d\,\tau}{2\pi\,\mu};\ \frac{b\,d\,\tau}{2\pi\,\mu};\ \frac{c\,d\,\tau}{2\pi\,\mu}$$

um die Coordinatenaxen, deren Arbeit während der Zeit $d\,t$ gleich:

$$\left(\frac{a}{4\pi\,\mu}\cdot\frac{d\,a}{d\,t} + \frac{b}{4\pi\,\mu}\cdot\frac{d\,b}{d\,t} + \frac{c}{4\pi\,\mu}\cdot\frac{d\,c}{d\,t}\right) d\,t\,d\,\tau$$

ist. μ ist eine, innerhalb eines homogenen isotropen Körpers constante Grösse. Wählen wir eine Zeit, wo noch keine electrischen oder magnetischen Störungen vorhanden wären, das Feld sich also vollkommen im Normalzustande befand, zum Zeitanfange, so ist die vom Zeitanfange bis zur Zeit t von den Drehmomenten im Volumelemente $d\,\tau$ geleistete Arbeit:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8\pi\,\mu}\,d\,\tau \qquad 2)$$

Hierbei sind freilich die Coordinaten x, y, z des Aethertheilchens als variabel aufzufassen; wollte man darunter fixe Coordinaten verstehen, so könnte man unter φ, χ, ψ die Componenten der daselbst zu irgend einer Zeit t herrschenden Geschwindigkeit des Aethers in den Richtungen der Coordinatenaxen verstehen, sodass man hätte:

$$\left.\begin{aligned} F &= \int_0^t \varphi \, d t \\ G &= \int_0^t \chi \, d t \\ H &= \int_0^t \psi \, d t \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Die Drehung, welche das im Punkt $x\ y\ z$ befindliche Volumelement $d\tau$ während der Zeit dt um die x-Axe erfährt, wäre dann gleich:

$$\frac{d t}{2}\left(\frac{d \psi}{d y}-\frac{d \chi}{d z}\right)$$

und a wäre die doppelte Summe der Drehungen, welche alle durch den Punkt $x\ y\ z$ von der Zeit Null bis t hindurchgegangenen Volumelemente im Momente des Durchganges um die x-Axe erfuhren. Analoge Bedeutung hätten b und c bezüglich der y- und z-Axe.

Beide Auffassungen führen weder bei der stationären Aetherbewegung (Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction stationärer und angenähert stationärer elektrischer Ströme, Magnetismus), noch bei sehr kleinen Schwingungen (Licht) zu verschiedenen Gleichungen. Andere Phänomene wurden aber bisher kaum quantitativ mit den Gleichungen verglichen.

Bezeichnen wir ferner die Dichte des Aethers mit $\frac{k}{4\pi}$, so ist die kinetische Energie des im Volumelemente $d\tau$ befindlichen Aethers:

$$\frac{k}{8\pi}\left(\varphi^2+\chi^2+\psi^2\right) d\tau \qquad 4)$$

Wir denken uns, bloss um die Bewegungsgleichungen des Aethers zu erhalten, auf jedes Volumelement $d\tau$ des Aethers beliebige Kräfte mit den Componenten:

$$X\,d\tau, \quad Y\,d\tau, \quad Z\,d\tau \tag{5}$$

wirkend, deren Arbeit während der Zeit dt also:

$$\left(X\frac{dF}{dt} + Y\frac{dG}{dt} + Z\frac{dH}{dt}\right) d\tau\, dt \text{ ist.}$$

Da ausserdem in dem betreffenden Volumelemente die Arbeit:

$$C\cdot\left[\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dG}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right] dt\, d\tau \tag{6}$$

in Wärme umgesetzt werden soll, so lautet die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$0 = \int d\tau \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mu}\left(a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt}\right) \\ + k\left[\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \chi\frac{d\chi}{dt} + \psi\frac{d\psi}{dt}\right] \\ + 4\pi\left(X\frac{dF}{dt} + Y\frac{dG}{dt} + Z\frac{dH}{dt}\right) \\ + 4\pi C\left[\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dG}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right] \end{array} \right\} \tag{7}$$

wobei dies Integral über den ganzen in Betracht kommenden Raum zu erstrecken ist. Befinden sich daselbst verschiedene Körper, so wollen wir deren Trennungsflächen niemals als absolute Discontinuitätsstellen, sondern vielmehr als Uebergangssichten denken, innerhalb deren die Werte von μ, k und C, wenn auch rasch, so doch continuirlich von den im Innern des einen zu den im Innern des anderen Körpers geltenden Werten übergehen.

Wir substituiren für $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}$ und $\frac{dc}{dt}$ deren Werte aus den Gleichungen 2) und integriren jedes Glied partiell. Nach der gemachten Annahme giebt es im Innern keine discontinuirlichen Trennungsflächen, an der äusseren in grosser Entfernung gedachten Oberfläche unseres Raums aber sollen

F, G und H verschwinden, sodass also alle Oberflächenintegrale verschwinden. Substituirt man ferner für φ, χ, ψ deren Werte aus den Gleichungen 1), so geht die Gleichung 7) über in:

$$\int d\tau \left\{ \begin{aligned} &\frac{dF}{dt}\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{c}{\mu}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{b}{\mu}\right) + k\frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi C\frac{dF}{dt} + 4\pi X\right] \\ &+\frac{dG}{dt}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{a}{\mu}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{\mu}\right) + k\frac{d^5G}{dt^2} + 4\pi C\frac{dG}{dt} + 4\pi Y\right] \\ &+\frac{dH}{dt}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{\mu}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{a}{\mu}\right) + k\frac{d^2H}{dt^2} + 4\pi C\frac{dH}{dt} + 4\pi Z\right] \end{aligned} \right\} = 0 \qquad 8)$$

Da die Kräfte und Beschleunigungen mit Ausnahme natürlich der von den Bewegungshindernissen herrührenden von den augenblicklich herrschenden Geschwindigkeiten unabhängig sind, so sind in dieser Gleichung $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$ und $\frac{dH}{dt}$ als unabhängig zu betrachten und es müssen deren Coefficienten separat verschwinden. Man kann übrigens die Veränderungen von F, G und H in ächte Variationen verwandeln, dadurch, dass man den Grössen X, Y, Z während eines sehr kurzen Zeitintervalles sehr grosse Werte erteilt. (Vergl. Maxwell on physical lines of force, Scient. Pap. I. p. 475 Gleichung 53. Phil. Mag. (4) vol. 21.)

Setzen wir daher lediglich zur Abkürzung:

$$f = -\frac{k}{4\pi}\cdot\frac{dF}{dt}; \quad g = -\frac{k}{4\pi}\frac{dG}{dt}; \quad h = -\frac{k}{4\pi}\frac{dH}{dt} \qquad 9)$$

$$p = -C\frac{dF}{dt}; \quad q = -C\frac{dG}{dt}; \quad r = -C\frac{dH}{dt} \qquad 10)$$

$$u = p + \frac{df}{dt}; \quad v = q + \frac{dg}{dt}; \quad w = r = \frac{dh}{dt} \qquad 11)$$

so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi \cdot u &= \frac{d}{dy}\left(\frac{c}{\mu}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{b}{\mu}\right) \\ 4\pi \cdot v &= \frac{d}{dz}\left(\frac{a}{\mu}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{\mu}\right) \\ 4\pi \cdot w &= \frac{d}{dx}\left(\frac{b}{\mu}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{a}{\mu}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

was genau mit den Gleichungen übereinstimmt, welche Maxwell für die elektrischen und magnetischen Erscheinungen in ruhenden Körpern fand. (Vergl. meine Vorlesungen über Maxwells Theorie l. t. z. Barth. 1891 pag. 84. Art. 88.)

Direct könnten diese Gleichungen nach der folgenden, ebenfalls schon von Thomson l. c. in ähnlicher Weise angewandten Methode gewonnen werden. Das Volumelement $d\tau$ sei ein Parallelepiped, dessen eine Ecke die Coordinaten $x\ y\ z$ hat, während die anderen um ξ resp. η, ζ grössere Coordinaten haben. Daher wirkt darauf um die y-Axe das Drehmoment:

$$m = \frac{b\,\xi\,\eta\,\zeta}{2\,\pi\,\mu}$$

Das Volumelement ist aber mit den umgebenden so verbunden, dass es sich nicht davon loslösen, und ohne diese mitzudrehen, diese Drehung ausführen kann. Es werden daher von den umgebenden Aetherteilchen auf die 4 Seitenflächen, welche der y-Axe parallel sind, Tangentialkräfte ausgeübt werden müssen, welche zusammen das gleiche Drehungsmoment liefern. Nehmen wir an, dass im Gegensatze zum Verhalten gewöhnlicher elastischer Körper hier Winkeländerungen des Parallelepipedes keine erheblichen elastischen Kräfte wachrufen, also die gewöhnlichen Tangentialkräfte der Elasticitätslehre nahe Null sind, so wird sich das Drehmoment unter beide Flächenpaare gleichmässig verteilen. Auf die eine Fläche Φ vom Inhalte $\xi\,\eta$, welche

zur z-Axe senkrecht steht, wirkt daher die Kraft $\frac{m}{2\zeta}$ in der positiven, auf die Gegenfläche Φ' die gleiche Kraft in der negativen x-Richtung. Diese Kräfte werden an den Trennungsflächen je zweier Volumelemente wirken und natürlich an Intensität sich continuirlich von Punkt zu Punkt im Raum ändern. Da aber Φ' und Φ sich dadurch unterscheidet, dass z um ζ grösser ist, so wirkt mit Beachtung des Kleinen 2. Ordnung auf letztere Fläche die Kraft:

$$\frac{1}{2\zeta}\left(m + \frac{d\,m}{d\,z}\,\zeta\right)$$

Beide Kräfte zusammen liefern daher:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\,m}{d\,z} = \frac{\xi\,\eta\,\zeta}{4\,\pi}\cdot\frac{d\left(\frac{b}{\mu}\right)}{d\,z}$$

in der x-Richtung. Ganz analog ist die Resultirende:

$$-\frac{\xi\,\eta\,\zeta}{4\,\pi}\frac{d\left(\frac{c}{\mu}\right)}{d\,y}$$

Zieht man von diesen Molekularkräften den Reibungswiderstand $C\frac{d\,F}{d\,t}$ ab, setzt die so erhaltene Gesammtkraft gleich der mit der Masse $\frac{k\,\xi\,\eta\,\zeta}{4\,\pi}$ multiplicirten Beschleunigung in der x-Richtung, und multiplicirt schliesslich mit $\frac{4\,\pi}{\xi\,\eta\,\zeta}$, so folgt sofort die obige Gleichung:

$$k\,\frac{d^2 F}{d\,t^2} + 4\,\pi\,C\,\frac{d\,F}{d\,t} = \frac{d\left(\frac{b}{\mu}\right)}{d\,z} - \frac{d\left(\frac{c}{\mu}\right)}{d\,y}.$$

Die Grundgleichungen des Elektromagnetismus für bewegte Körper findet man hieraus, indem man unter $x\ y\ z$

nicht die Coordinaten einer fixen Stelle des Raumes, sondern eines Pnnktes der ponderabeln Körper versteht, welcher deren etwaige Bewegung mitmacht. In Räumen, wo sich keine ponderable Materie befindet, kann dem Aether jede beliebige damit verträgliche Bewegung zugeschrieben werden. Diese Bewegungen müssen sich mit den im früheren beschriebenen Bewegungen superponiren. (Vergl. Hertz über die Grundgleichungen der Elektrodynamik in bewegten Körpern. Wied. Ann. Bd. 41. p. 369; 1890. Ges. Abh. pag. 256.)

Wie man sieht, basirt die gesammte Beweisführung auf den Ausdrücken 2), 4), 5), 6) für die Energie des Aethers. Man kann nun den Ausdruck 2) auch in anderer Weise als durch die bisher superponirten Drehmomente erhalten. Man denke den Aether in einem isotropen Medium als einen homogenen, isotropen, elastischen Körper und F, G, H als die Verschiebungen eines Teilchens desselben, die Energie der elastischen Kräfte ist dann, wie bekannt:

$$\begin{aligned} A = K\Big[\Big(\frac{dF}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dG}{dy}\Big)^2 + \Big(\frac{dH}{dz}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{dG}{dz}+\frac{dH}{dy}\Big)^2 \\ + \frac{1}{2}\Big(\frac{dH}{dx}+\frac{dF}{dz}\Big)^2 + \Big(\frac{dF}{dy}+\frac{dG}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}\Big)^2\Big] \end{aligned} \qquad 13)$$

(Vergl. Kirchhoff 11. Vorlesung über Mechanik 3. Auflage pag. 122.)

Wir wollen $\Theta = -1$ setzen und jedes Glied von der Ferne

$$\int d\tau K \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dG}{dy}$$

zuerst partiell nach x, hierauf partiell nach y integrieren. Wenn K überall denselben Wert hat, die Trennungsfläche zweier Körper keine mathematische Discontinuitätsstelle enthält, und F, G, H an der im Unendlichen gedachten Begrenzungsfläche des gesammten betrachteten Körpersystems



verschwinden, so verschwinden auch die auf die Oberfläche bezüglichen Glieder, und die Gleichung 13) verwandelt sich in:

$$\Lambda = \frac{K}{2}\left[\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)^2+\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)^2\right],$$

was mit dem Ausdruck 2) übereinstimmt, wenn man $K = \frac{1}{4\pi\mu}$ setzt. Es würden also dann ebenfalls die Maxwell'schen Gleichungen für den Elektromagnetismus folgen. Hierbei ist freilich zu bemerken, dass für einen festen Körper mit freier im Endlichen liegenden Oberfläche Θ keinen negativen Wert haben kann. Allein bei einem überall unbegrenzten Körper, wie es der Aether ist, dürften auch negative Werte von Θ zulässig sein, wenigstens sobald es sich nur um eine dynamische Illustration, wie hier, handelt.[1]) Schreibt man obendrein dem Aether Incompressibilität zu, so ist eo ipso:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0$$

und der Factor Θ, welcher bei dieser Grösse steht, gleichgültig und daher kommen die Maxwell'schen Gleichungen nicht bloss für $\Theta = -1$, sondern für jeden beliebigen Wert des Θ zum Vorschein. Namentlich gilt dies auch für $\Theta = \infty$, was Incompressibilität zur Folge hat. Für andere Werte des Θ würde eine verallgemeinerte Maxwell'sche Theorie erhalten, wie sie Helmholtz aus den Fernwirkungsgleichungen ableitete. Der schreiende Widerspruch, welcher zwischen der Existenz so magnetisierbarer Körper, wie Eisen und der Annahme, dass K in allen Körpern gleich ist, zu bestehen scheint, kann, wie ich glaube, durch die Voraussetzung behoben werden, dass die hohe Magnetisierbarkeit des Eisens nicht durch Herrschen eines kleineren Wertes von K

1) Der durch $\Theta = -1$ bedingte Zustand, welchen Thomson l. c. den quasilabilen nennt, wurde entdeckt durch Loschmidt in dessen Schrift über die Natur des Aethers, Wien bei Gerold und Sohn 1862, vgl. Fortschritte der Physik, Jahrgang 1862. pag. 68.

in seinem Innern bewirkt wird, sondern durch darin schon vorherbestehende Molekülarmagnete d. h. kleine elektrische Ströme von unveränderlicher Intensität, die bei der Magnetisierung bloss gerichtet werden.

Hier ist freilich noch eines zu bemerken. Dem Aether, welchen wir anfangs als incompressible Flüssigkeit voraussetzten, werden neue Eigenschaften einer festen Substanz beigelegt. Er müsste sich also gewissen Kräften gegenüber wie ein fester, anderen wie ein flüssiger Körper verhalten. Analogien dafür an ponderabeln Körpern fehlen nicht. Man denke an Tresca's Versuche über den Ausfluss fester Körper, welche mit grossem Drucke durch Oeffnungen gepresst werden. Bei solchen Körpern werden trotz der Anwendbarkeit der Elasticitätsgleichungen innerhalb gewisser Grenzen doch die Verschiebungen F, G, H einen beliebig grossen Wert annehmen können. Die Theorie dieser Körper ist offenbar die Erforschung der Natur des Aethers von grösster Wichtigkeit. Vgl. Stokes, über die Natur des Aethers, wie sie sich aus der Aberration ergibt. Phil. mag. July 1846. Scient. pap. vol. I pag. 153. Hier will ich nur noch eine Untersuchung anschliessen, ob diese Hypothese nicht in quantitativer Beziehung auf Widersprüche stösst.

Sei ein homogenes, isotropes Medium, z. B. Luft gegeben. Daselbst habe C einen sehr kleinen Wert; bei gegebenem Werte der Geschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2}$$

des Aethers sei also die in der Zeit und Volumeneinheit in Wärme umgesetzte lebendige Kraft des Aethers $C\omega^2$ sehr klein. Ein solcher Körper heisst ein schlechter Elektricitätsleiter, weil bei gegebener Stromstärke $\delta = C\omega$ umgekehrt die erzeugte Joule'sche Wärme $\frac{\delta^2}{C}$ sehr gross ist. Sei:

$$F = \frac{dW}{dx}; \quad G = \frac{dW}{dx}; \quad H = \frac{dW}{dz}.$$

Der Druck an irgend einer Stelle ist dann:

$$p = p_0 - \frac{k}{8\pi}\left[\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dz}\right)^2\right]$$

Die gesammte Kraft X, welche auf einen im Aether befindlichen Körper in der Richtung der x-Axe wirkt, ist:

$$X = \int p\, d\, s \cos(n, x) = \int\int p\, d\, y\, d\, z = \int \frac{d\, p}{d\, x}\, d\, \tau$$

wobei $d\,\tau$ ein Volumelement, $d\,s$ ein Oberflächenelement des Körpers, n die zu letzterem gezogene Normale ist. Die Substitution des Wertes für p liefert:

$$X = -\int d\,\tau\, \frac{k}{4\pi}\left[\frac{dW}{dx}\cdot\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{dW}{dy}\cdot\frac{d^2W}{dx\,dy} + \frac{dW}{dz}\cdot\frac{d^2W}{dx\,dz}\right]$$

und die partielle Integration liefert:

$$X = \int k\, \frac{d\tau}{4\pi}\, \frac{dW}{dx}\, \Delta W$$

Setzt man $\Delta W = -4\pi\,\varepsilon$ und betrachtet bloss die Coordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$ der elektrischen Masse $\varepsilon\, d\,\tau$ als variabel, so erhält man:

$$X = -k\,\frac{d}{d\,\xi}\int \varepsilon\, W\, d\,\tau$$

(Vergl. Maxwell scient. pap. vol. I pag. 497.)

Wir wollen hier aber nur ein ganz specielles Beispiel in einer ganz directen Weise behandeln. In dem oben beschriebenen Medium sollen sich zwei gleichnamig geladene Körper befinden. Der erste derselben soll nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkte A und dem Radius ϱ, der zweite nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkt B und dem Radius ϱ' abweichen. Wir wählen A zum Coordinatenanfangspunkt und ziehen die negative Abscissenaxe gegen B hin. Die Länge $A\,B = \gamma$ soll sehr gross sein gegenüber den beiden Radien ϱ und ϱ'. Setzen wir wieder:

$$F=\frac{dW}{dx}; \quad G=\frac{dW}{dy}; \quad H=\frac{dW}{dz},$$

so entspricht diesem Problem bekanntlich die Lösung:

$$W=\frac{M}{r}+\frac{N}{s},$$

wobei M und N Functionen der Zeit, r und s die Entfernungen des Punktes mit den Coordinaten $x\ y\ z$ (des Aufpunktes, von A respective B sind. Ferner ist:

$$\varphi=\frac{dV}{dx}; \quad \chi=\frac{dV}{dy}; \quad \psi=\frac{dV}{dz};$$

wobei V die Ableitung von W nach der Zeit ist, also:

$$V=\frac{M'}{r}+\frac{N'}{s}, \text{ wo:}$$

$$M'=\frac{dM}{dt}; \quad N'=\frac{dN}{dt}.$$

Dies liefert überall $a=b=c=0$. Daher folgt aus den Gleichungen 12):

$$u=p+\frac{df}{dt}=-C\varphi-\frac{k}{4\pi}\frac{d\varphi}{dt}=0, \text{ also:}$$

$$\left.\begin{aligned} M' &= \alpha e^{-\frac{4\pi Ct}{k}} \\ N' &= \beta e^{-\frac{4\pi Ct}{k}} \end{aligned}\right\} \qquad 14)$$

α und β sind Constanten.

Das Aethervolumen, welches in der Zeit dt dem ersten Körper entströmt, ist:

$$4\pi\varrho^2\frac{M'}{\varrho^2}dt;$$

alles andere kann als unendlich klein vernachlässigt werden. Der gesammte Aether, welcher von der Zeit 0 bis zur Zeit ∞



dem ersten Körper entströmt, womit dieser also geladen war, hat nach dem Ausströmen das Volumen:

$$\Omega = 4\pi \cdot \int_0^\infty M' \, dt = k \frac{\alpha}{C} \qquad 15)$$

da $\frac{k}{4\pi}$ die Dichte des Aethers nach dem Ausströmen ist. (Die Körper selbst können aus beliebiger ponderabler Masse bestehen, worin wir uns den Aether durch irgend welche Kräfte (chemische) beliebig verdichtet denken.)

Die Masse des Aethers, womit der erste Körper geladen war, ist also:

$$m = \frac{k^2 \alpha}{4\pi C} \qquad 16)$$

Dieselbe Grösse hat für den zweiten Körper den Wert:

$$\frac{k^2 \beta}{4\pi C}$$

Wir wollen nun die gesammte Kraft X suchen, welche auf den ersten Körper infolge des Aetherdruckes ausgeübt wird. Derselbe sendet beständig durch innere Kräfte Aether normal zu seiner Oberfläche aus. Wäre er absolut kugelförmig, so müsste die durch obige Formeln angegebene Aetherbewegung ein wenig modificiert werden, damit die Aetherausstrahlung überall normal zur Körperoberfläche geschieht. Es vereinfacht die Rechnung, wenn man umgekehrt die Gestalt des Körpers so von der Kugelform abweichen lässt, dass dessen Oberfläche überall senkrecht auf der durch die obigen Gleichungen definierten Aetherströmung steht; d. h. der Gleichung:

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{s} = c$$

genügt, wobei c eine Constante ist.

Seien x y z die Coordinaten eines Punktes der Körperoberfläche und setzen wir:

$$y^2 + z^2 = \eta^2$$

so ist also:

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma^2 + 2\gamma x + x^2 + \eta^2}} = c,$$

also, da γ gross gegen r ist:

$$\frac{\alpha}{r} = c + \frac{\beta x}{\gamma^2} \tag{17}$$

Der Druck im Punkte mit den Coordinaten $x\, y\, z$ ist (wieder mit Vernachlässigung des unendlich kleinen höherer Ordnung):

$$p = p_0 - \frac{k}{8\pi}\left(\frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{2\alpha\beta x}{r^3\gamma^2}\right)$$

p_0 bedeutet den Druck in sehr grosser Entfernung. Setzen wir in der Klammer im ersten Glied für $\frac{1}{r^4}$ seinen Wert aus der Gleichung 17) ein und dann in den Gliedern von der niedrigsten Grössenordnung für c wieder seinen angenäherten Wert $\frac{\alpha}{r}$ so folgt:

$$p = p_0 - \frac{k}{4\pi}\left(\frac{c^2}{\alpha^3} + \frac{6\alpha\beta x}{r^3\gamma^2}\right).$$

Sämmtliche Punkte des Körpers, für welche x zwischen x und $x + dx$, η zwischen η und $\eta + d\eta$ liegt, besetzen einen Gürtel von der Fläche:

$$2\pi\eta\sqrt{dx^2 + d\eta^2}.$$

Der Druck, welcher auf diesen Gürtel wirkt, hat in der Richtung der positiven Abscissenaxe die Componente $-2\pi p d\eta$. Da $\eta\, d\eta$, über den ganzen Körper integriert, gleich Null ist, so verschwinden dabei die beiden ersten constanten Glieder im Ausdruck von p, und die gesammte auf den ersten Körper in der Richtung der Abscissenaxe wirkende Kraft ist:

$$X = \frac{3\,k\,\alpha\,\beta}{2\,\gamma^2} \cdot \int \frac{x\,\eta\,d\,\eta}{r^3}$$

Hier kann der Körper wieder als Kugel betrachtet und

$$x = r\cos\vartheta$$
$$\eta = r\sin\vartheta$$

gesetzt werden, wodurch man, da r constant ist, erhält:

$$X = \frac{3\,k\,\alpha\,\beta}{2\,\gamma^2} \cdot \int_0^\pi \cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\,\vartheta = \frac{k\,\alpha\,\beta}{\gamma^2}$$

Es soll nun das Dielectricum so schlecht leiten, dass die Ladung in T Tagen von 1 auf $\frac{1}{e}$ sinkt ($e = 2{,}718\cdots$). Dann ist:

$$\frac{4\pi\,C}{k} = \frac{1}{24\cdot 60\cdot 60\,T\,\mathrm{sec}}, \quad C = \frac{k}{10^6\,T\,\mathrm{sec}}.$$

Ferner soll jede der geladenen Kugeln R cm Radius haben und zu Anfang mit 30000 V Volt geladen worden sein. Ein Volt ist in elektromagnetischem Maasse das Potential:

$$\frac{10^8\sqrt{\mathrm{gr\ cm}^3}}{\mathrm{sec}^2};$$

in elektrostatischem Maasse:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{gr\ cm}}}{300\ \mathrm{sec}}.$$

Da das Potential einer Kugel gleich der Elektricitätsmenge dividiert durch den Kugelradius ist, so ist die auf jeder der Kugeln vorhandene Elektricitätsmenge in statischem Maasse gemessen:

$$\varepsilon = \frac{100\,R\sqrt{\mathrm{gr\ cm}^3}}{\mathrm{sec}}\,V.$$

Die Kraft, mit welcher sich die Kugeln abstossen, ist $X = \frac{\varepsilon^2}{r^2}$, und vergleicht man dies mit dem oben gefundenen Werte von X, so folgt:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} = \frac{100}{\sec} V R \sqrt{\frac{\text{gr cm}^3}{k}}, \text{ also:}$$

$$\Omega = 10^8 V \cdot T \cdot R \sqrt{\frac{\text{gr cm}^3}{k}};$$

$$m = \frac{10^8}{4\pi} V \cdot T \cdot R \sqrt{k \cdot \text{gr cm}^3}.$$

Setzen wir die Dichte des Aethers 10^{16+2h} mal kleiner als die des Wassers, also:

$$k = 10^{-16-2h} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \cdot 4\pi, \text{ so folgt:}$$

$$\Omega = \frac{10^h}{\sqrt{4\pi}} V T R \text{ cm}^3; \quad m = \frac{10^{-h}}{\sqrt{4\pi}} V T R \text{ gr}.$$

Thomson fand als untere Grenze für die Dichte des Aethers 156.10^{-18}grcm. Wäre dieselbe wirklich gleich dieser unteren Grenze, so hätte man h etwa $= 2,1$, $m = \frac{VTR}{440}$ gr. Wäre für das Medium, in welchem sich die angenommene Kugel von einem cm-radius befindet, $R = 1$, $T = 1$, d. h. die Ladung würde in einem Tage auf den $2{,}718^{\text{ten}}$ Teil herabsinken, so müsste für $V = 1$, d. h. bei einer Ladung mit 30 000 Volt, bereits eine Aethermasse von $\frac{1}{440}$ gr in sie hinein, oder aus ihr herausgeschafft werden. Nun giebt es unzweifelhaft Media, wo T weit grösser ist, sodass m noch grösser ausfiele. Allein man muss bedenken, dass für die enorme von uns angenommene Ladung die Elektricitätsleitung und -Verbreitung wesentlich complicierteren Gesetzen folgt, sodass die Anwendbarkeit der einfachen linearen Gleichungen



Maxwell's fraglich wird. Wenn daher diese Zahl auch jedenfalls an der Grenze des möglichen liegt, so kann doch meiner Ansicht nach gerade nicht behauptet werden, dass die vorliegende mechanische Analogie in quantitativer Hinsicht heute auf einen völligen Widerspruch stosse.

Behufs weiterer Versinnlichung unserer mechanischen Analogie betrachten wir dasselbe Dielectricum (Luft) wie im vorigen. Es sollen jedoch darinnen sich verschiedene Körper befinden, in welchen k und C andere Werte haben. In der Luft und in allen Körpern, worin C klein von derselben Grössenordnung ist, werden φ, χ, ψ sehr lange endlich bleiben, dagegen werden, weil alles fast stationär wird, deren Differentialquotienten nach der Zeit, sowie p, q, r und u, v, w bald sehr klein werden. Daher wird gemäss der Gleichung 12):

$$\frac{a}{\mu} d x + \frac{b}{\mu} d y + \frac{c}{\mu} d z$$

ein vollständiges Differential $d W$, d. h. die magnetischen Kräfte haben ein Potential. Aus Gleichung 2) folgt ferner:

$$\frac{d}{d x}\left(\mu \frac{d W}{d x}\right) + \frac{d}{d y}\left(\mu \frac{d W}{d y}\right) + \frac{d}{d z}\left(\mu \frac{d W}{d z}\right) = 0.$$

Da W und μ überall stetig und die erstere Grösse im Unendlichen gleich Null ist, so folgt hieraus:

$$W = a = b = c = 0.$$

Obige Gleichung ist nämlich die Bedingung dafür, dass:

$$\int\int\int \mu \, d x \, d y \, d z \left[\left(\frac{d W}{d x}\right)^2 + \left(\frac{d W}{d y}\right)^2 + \left(\frac{d W}{d z}\right)^2\right]$$

ein Minimum ist, was nur für $W = 0$ zutrifft.

Man sieht daher durch diese Darstellung den Grund ein, weshalb die Magnetisierung so geschieht, dass die magnetische Energie, d. h. die Summe der mit μ multiplicierten

Quadrate der magnetischen Momente der Volumenelemente ein Minimum wird, sowie anderer ähnlicher Minimumsätze. (Vergl. Stefan, Wien. Sitzungsber. Bd. 99 pag. 319, 1890.)

Wären in einzelnen Körpern Ampère'sche Molekularströme, so würde in diesen und an ihrer Oberfläche u, v, w nicht gleich Null. Man würde daher ein von Null verschiedenes magnetisches Potential bekommen. Sehr rasche Veränderungen desselben mit der Zeit (magnetische Ströme) würden elektrische Kräfte erregen, wie sie freilich noch nicht beobachtet wurden. Wir wollen jedoch hier solche Fälle ausschliessen und überall $a = b = c = 0$ setzen. Dann folgt aus den Gleichungen 2), dass:

$$\varphi\, d x + \chi\, d y + \psi\, d z$$

ebenfalls ein vollständiges Differential $d V$ ist, dass daher auch die elektrischen Kräfte ein Potential haben. Die Trennungsfläche zweier Körper denken wir uns als eine sehr dünne, aber continuierliche Uebergangsschicht, in welcher dieselben Bedingungen erfüllt sind, die wir überall annehmen. Da die Gleichungen 2) auch im Innern dieser Uebergangsschicht erfüllt sein müssen, so findet man in bekannter Weise, indem man sie nach t differentiiert und die Normale zur Uebergangsschicht als Abscissenaxe wählt, dass der Differentialquotient von V nach einer Richtung tangential zur Uebergangsschicht zu beiden Seiten derselben den gleichen Wert haben muss. Die durch die Flächeneinheit $d v$ der Uebergangsschicht hindurchgehende Aethermasse ist:

$$\frac{k}{4\pi} \cdot \frac{d V}{d n}$$

wenn die Richtung n normal zur Uebergangsschicht ist. Da dieselbe Aethermasse auf der anderen Seite austreten muss, so muss dieser Ausdruck zu beiden Seiten denselben Wert haben. Dies sind die alten bekannten Bedingungsgleichungen an der Trennungsfläche zweier Dielectrica.



Hat in einem Körper C einen grösseren Wert, so nimmt daselbst (cf. Gleichung 14)) V rascher ab (die elektrische Nachwirkung, elektrische Absorption). Hat C einen sehr grossen Wert, d. h. ist der Körper ein Leiter, so muss V bald constant werden. Die Aetherströmung umgiebt dann den betreffenden Körper wie Wasser einen eingetauchten festen Körper. Die dadurch entstandene Modification des Wertes von V nennt man die Elektrisierung des eingetauchten Körpers durch Influenz. Man kann diese Modification auch dadurch entstanden denken, dass sich zur Aetherbewegung, welche ohne Anwesenheit des Leiters stattfinden würde, noch ein Ausströmen von Aether von der positiv influenzierten Seite des Körpers, ein Einströmen von der negativen superponiert, von der Beschaffenheit, dass dadurch die Aetherbewegung überall tangential zur Oberfläche des Körpers gemacht wird. Im Körper selbst ist nur ein ganz schwacher Strom, welcher die langsame Abnahme der elektrischen Influenz bewirkt, die durch die allmähliche Zerstreuung der Elektricität an den ursprünglich geladenen Körpern bedingt ist. Dies wäre in allgemeinen Zügen das Bild der sogenannten Elektrostatik.

Um uns ein Bild von der Aetherbewegung beim stationären elektrischen Strome zu verschaffen, wollen wir einen unendlich langen geraden Kreiscylinder vom Radius ϱ betrachten, dessen Axe die Abscissenaxe ist und der in Richtung der positiven Abscissen vom positiven elektrischen Strome durchflossen wird. Das elektrostatische Potential, welches nötig ist, um einen solchen Strom zu treiben, wird in unendlicher Entfernung von der Abscissenaxe unendlich. In der alten Fernwirkungstheorie schadet dies wenig, da man die elektrostatischen und elektrodynamischen Erscheinungen daselbst völlig getrennt betrachtet. Es muss eher als ein Vorzug der neuen Theorie betrachtet werden, dass dabei eine solche Trennung überhaupt nicht angeht.

Um das elektrostatische Potential endlich zu erhalten, können wir den Cylinder von einem coaxialen Hohlcylinder von sehr grossem Radius R umgeben denken, der zur Erde abgeleitet und ohne elektromotorische Kräfte ist. Sei $\frac{A}{C}$ die Stromdichte im massiven Cylinder, so muss daselbst F das Glied $-At$ enthalten. Da wir es mit einem Leiter zu thun haben, setzen wir $k = 0$ und es folgt aus der Gleichung 80) meiner „Vorlesungen über Maxwell's Theorie", welche ja auch leicht aus den hier entwickelten Gleichungen gewonnen werden kann:

$$F = -At - \pi\mu A C r^2, \quad G = H = 0$$

wobei $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ die Distanz des betrachteten Punktes von der Axe des Cylinders vorstellt. Hieraus folgt im Innern des massiven Cylinders:

$$a = 0; \quad b = -2\pi\mu A C z; \quad c = 2\pi\mu A C y.$$

Zwischen dem massiven und dem Hohlkugelcylinder ist ein Dielectricum (Luft). Daselbst sollen μ, C, k die Werte μ', C', k' haben, wovon C' sehr klein ist. An der Trennungsfläche muss:

$$\left.\begin{aligned} a &= a' \\ \mu b &= \mu' b' \\ \mu C &= \mu' C' \\ F &= F' \\ C\frac{dG}{dt} &= \frac{k'}{4\pi}\frac{dG'}{dt} \\ C\frac{dH}{dt} &= \frac{k'}{4\pi}\frac{dH'}{dt} \end{aligned}\right\}$$

sein. Die soeben citierte Gleichung 80) liefert hier:

$$\Delta F = \Delta G = \Delta H = 0.$$

Daher muss zunächst:

$$F = -A\left(\frac{t}{l\frac{\varrho}{R}} + 2\pi\mu' C\varrho^2\right) l\frac{r}{R} + \pi A C\varrho^2 \left(2\mu' l\frac{\varrho}{R} - \mu\right)$$

sein, wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Da ferner a, b, c nicht ins Unendliche wachsen dürfen, weil dadurch unendliche Kräfte geweckt würden, so muss im Dielektricum der t enthaltende Teil von:

$$F\,dx + G\,dy + H\,dz$$

ein vollständiges Differential sein, woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} G &= -\frac{A\,t\,x\,y}{r^2\,l\frac{\varrho}{R}} \\ H &= -\frac{A\,t\,x\,z}{r^2\,l\frac{\varrho}{R}} \end{aligned}\right\}$$

Die Grösse:

$$\frac{g\,y + h\,z}{r = \varrho} = -\frac{k}{4\pi\,\varrho}\left(y\,\frac{d\,G}{d\,t} + z\,\frac{d\,H}{d\,t}\right) = \frac{k\,A\,x}{4\pi\,\varrho\,l\frac{\varrho}{R}}$$

ist das, was man die Flächendichte der freien Elektricität auf der Oberfläche des massiven Cylinders,

$$\int\left(\frac{d\,F}{d\,t}\,d\,x + \frac{d\,G}{d\,t}\,d\,y + \frac{d\,H}{d\,t}\,d\,z\right) = -\frac{A\,x}{l\frac{\varrho}{R}}\,l\frac{r}{R}$$

das, was man deren Potentialfunction nennt.

Für elektrostatisches Maass ist im Standardmedium $k = 1$. Von R würde man unabhängig, wenn zwei gleichbeschaffene, in entgegengesetzter Richtung durchströmte Cylinder, für deren Axen $y = 0$, $z = p$ und $z = -p$ ist, vorhanden wären, welche für $x = 0$ das elektrostatische Potential Null haben. Sind dann:

$$r = \sqrt{y^2 + (z-p)^2} \text{ und } s = \sqrt{y^2 + (z+p)^2}$$

die Entfernungen eines Punktes von der ersten resp. zweiten Axe, und ist der Radius ϱ beider Cylinder klein gegen p, so ist im ersten Cylinder:

$$F = -A\,t - \pi\,\mu\,A\,C\,r^2;\quad G = H = 0;$$
$$a = 0;\quad b = -2\pi\,\mu\,A\,C\,(z-p);\quad c = 2\pi\,\mu\,A\,C\,y;$$

im zweiten Cylinder:

$$F = A t + \pi \mu A C s^2; \quad G = H = 0;$$

$$a = 0; \quad b = -2 \pi \mu A C (z + p); \quad c = 2 \pi \mu A C y$$

und im umgebenden Dielektricum:

$$F = \left(-\frac{t}{l\frac{2p}{\varrho}} + 2 \pi \mu' C \varrho^2\right) A l\frac{s}{r} - \pi A C \varrho^2 \left(2 \mu' l\frac{2p}{\varrho} + u\right);$$

$$G = \frac{A t x y}{l\frac{2p}{\varrho}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right); \quad H = \frac{A t x}{l\frac{2p}{\varrho}} \left(\frac{z-p}{r^2} - \frac{z+p}{s^2}\right);$$

$$a = 0; \; b = -2 \pi \mu' C \varrho^2 \left(\frac{z-p}{r^2} - \frac{z+p}{s^2}\right);$$

$$c = 2 \pi \mu' C \varrho^2 y \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2}\right).$$

Ueber Auflösung und Wachsthum der Krystalle.

Von A. C. Gill.

(Eingelaufen 11. Juni.)

Bekanntlich werden in einem Gemenge grosser und kleiner Krystalle derselben Substanz, welches Temperaturschwankungen unterworfen ist, die kleineren Krystalle allmählich von den grösseren aufgezehrt, weil sie der Lösung bei gleichem Volumen eine grössere Oberfläche darbieten. Es könnte fraglich erscheinen, ob ausser dieser Ursache der Begünstigung der grösseren Krystalle noch eine andere vorhanden sei, d. h. ob nicht auch an und für sich unter gleichen Bedingungen ein grösserer Krystall langsamer aufgelöst werde und folglich auch schneller wachse, als ein solcher von geringeren Dimensionen.

Zur experimentellen Prüfung dieser Frage wurde zunächst Steinsalz gewählt, dessen Spaltungsstücke unzweifelhaft ein entsprechendes Verhalten zeigten, aber zur Feststellung des Gesetzes, nach welchem die aufgelöste Menge von der Grösse des Krystalls abhängt, nicht geeignet sind, weil sich zuerst die Kanten abrunden und die hierdurch hervorgebrachte Aenderung der Gestalt es unmöglich macht, genau zu bestimmen, wie viel pro Quadratcentimeter Ober-

fläche aufgelöst wurde. Um ganz einwurfsfreie Resultate zu erhalten, wurden sehr vollkommene, polirte Kugeln aus ganz homogenem Steinsalz von Herrn Steeg und Reuter angefertigt, und zwar solche von 6, 12 und 18 mm Durchmesser, in eine nicht ganz gesättigte Chlornatriumlösung eingehängt und 15 Minuten darin gelassen, während die Lösung, um Sättigungsdifferenzen und den Einfluss der Diffusion möglichst zu beseitigen, ununterbrochen umgerührt wurde. Es ergaben sich folgende Werthe:

Anfangs-Gewicht	End-Gewicht	Mittel-Gewicht	Die aus dem Gewicht berechneten Oberflächen	Verlust	M. g. gelöst per qcm	Berechnete Werthe
6.6519	6.3578	6.50485	10.028	0.2941	29.33	29.44
1.9641	1.8137	1.8889	4.397	0.1504	34.21	32.93
0.2437	0.2001	0.2219	1.054	0.0436	41.32	42.81

Wenn die pro Oberflächen-Einheit gelöste Menge eine Function der Grösse oder der Krümmung der Kugel ist, so muss sie in einer gesetzmässigen Beziehung zum Radius derselben stehen. In der That verhalten sich die in der 6. Columne stehenden Zahlen sehr nahe umgekehrt, wie die Kubikwurzeln der Radien. Legt man dieses Gesetz zu Grunde und berechnet, von je einer der drei Kugeln ausgehend, die Verluste der beiden anderen, so erhält man drei Reihen von berechneten Werthen, deren Mittel die unter „Berechnete Werthe“ in der letzten Columne angegebenen Zahlen angeben.

Eine zweite Versuchsreihe in einer noch stärkeren Lösung ergab für die pro Quadratcentimeter aufgelöste Menge

	beobachtet:	berechnet:
1. Kugel von 18 mm Durchmesser	24,86 mg	24,49 mg
2: „ „ 12 „ „	27,92 „	28,20 „
3. „ „ 6 „ „	36,07 „	36,24 „

Um eine ganz andere Diffusionsgeschwindigkeit und Capillaritätsconstante ins Spiel zu bringen, wurde eine Versuchsreihe mit verdünntem (35 %) Alkohol angestellt und gefunden:

	Gelöst pro Quadratcentimeter	Berechnet:
1.	25,57	24,83
2.	28,53	28,54
3.	34,84	35,90.

Aehnliche Resultate lieferten einige Versuche mit Kaliumbichromat, doch gelang es noch nicht, Kugeln dieser leicht spaltbaren Substanz frei von Sprüngen zu erhalten, und in Folge dessen entstanden natürlich Unregelmässigkeiten in der Auflösung, welche die Genauigkeit der Zahlen erheblich beeinflussten.

Da jedoch auch hier die Geltung derselben Beziehung angenähert hervortrat, und es somit erschien, dass dieselbe unabhängig von dem Krystallsystem sei und möglicherweise ebenso für krystallinische Aggregate und amorphe Körper gelte, wurden aus einem sehr dichten Aggregat von käuflichem Aluminiumsulfat Kugeln angefertigt, allerdings vorläufig nur in roher Weise mit dem Messer. Aber auch hier ergab sich in Wasser eine geringere Löslichkeit der grösseren nahezu nach demselben Gesetze.

Ist dasselbe in der That innerhalb gewisser Grenzen gültig, so muss auch umgekehrt an einem grösseren Krystall beim Wachsen sich auf der Einheit der Oberfläche in gleicher Zeit mehr Substanz absetzen, als auf einem kleineren. Ein vorläufiger Versuch mit drei verschieden grossen, frischen Spaltungsstücken von Steinsalz in derselben gesättigten Lösung ergab die gleichzeitige Gewichtszunahme pro Quadratcentimeter der Oberfläche

grösstes Spaltungsstück	7,56 mg
mittleres „	5,51 „
kleinstes „	3,74 „

Diese gefundenen Differenzen sind sogar noch etwas grösser, als sie nach dem obigen Gesetze sein sollten, doch kommt bei diesem Experiment noch der zunächst unbekannte Einfluss der Temperatur hinzu.

Die Versuche sollen nun auf eine grössere Reihe krystallisirter und amorpher Körper ausgedehnt und alsdann ausführlicher mitgetheilt werden.

Sitzung vom 2. Juli 1892.

1. Herr C. v. Kupffer macht Mittheilungen aus einer mit Unterstützung der Akademie ausgeführten umfassenden Untersuchung „über die Entwicklung des Störs".

2. Herr Ad. v. Baeyer bespricht im Anschluss an die in der Sitzung vom 11. Juni gemachte Mittheilung seine weiteren Versuche „über die Synthese des Dihydroparaxylols".

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1892.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten. — Die zunächst für die philos.-philol. u. histor. Classe bestimmten Druckschriften sind in deren Sitzungsberichten 1892 Heft II verzeichnet.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations 1889. 1891. Fol.

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions and Proceedings. Vol. XIV. Nr. 2. 1891. 8⁰.

State Library in Albany:

Bulletin of the New-York state Museum. Vol. I. Nr. 1. 1892. 8⁰.

State Museum in Albany:

44th annual Report. 1892. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

American Chemical Journal. Vol. 13. Nr. 7, 8. Vol. 14. Nr. 1. 1891/92. 8⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XIV. Nr. 1. 1891. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. IX. Heft 2. 1891. 8⁰.

Magnetical and Meteorological Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XIII. 1890. 1891. Fol.
Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. XII. Jahrg. 1890. 1891. 8⁰.

Museum in Bergen:

Aarsberetning for 1890. 1891. 8⁰.

Kgl. Preuss. geologische Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 5. 1892. 4⁰.
Abhandlungen zur geologischen Specialkarte von Preussen und Thüringen. Bd. IX. 3, mit Atlas. Bd. X. 3. 1891. 4⁰.
Jahrbuch für 1889. 1892. 8⁰.

Commission der internationalen Gradmessung in Berlin:

Verhandlungen der 1891 zu Florenz abgehaltenen Conferenz. 1892. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 24. Jahrg. 1891. Nr. 19, 20. 25. Jahrg. 1892. Nr. 1—11. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 43. Heft 3, 4. Bd. 44. Heft 1. 1891/92. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. XXII. Band. 1892. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1885. Jahrg. 41. Abth. 1—3. 1891. 8⁰.
Verhandlungen. 10. Jahrg. 1892. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie 1891. Bd. V. Nr. 18—26. 1892. Nr. 1—6. 1891/92. 8⁰.
Verhandlungen. 1890—1891. Nr. 17. 8⁰.

Kgl. Preuss. Meteorologisches Institut in Berlin:

Abhandlungen. Bd. I. Nr. 4, 5. 1892. 4⁰.
Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen im Jahre 1891. 1892. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXI. Jahrg. 1889, Heft 1, 2. 1892. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. 1892. Nr. 2—26. 4⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. XII. Jahrg. 1892. Heft 1—6. gr. 8⁰.

Schweizerische geologische Commission in Bern:

Beiträge zu einer geologischen Karte der Schweiz. Text. Lief. 25 und 31. 1891. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 48. Jahrg. 2. Hälfte. 1891. 8⁰.

Society of natural history in Boston:

Proceedings. Vol. XXV. part 2. 1891. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XII. Heft 2. 1892. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Brünn:

Verhandlungen. Bd. XXIX. 1890. 1891. 8⁰.
IX. Bericht der meteorologischen Commission. 1891. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

50me anniversaire de la fondation de l'Académie. Rapports sur les travaux de l'Académie 1866—1891. 1891. 8⁰.
Bulletin. IV. Série, tom. V. Nr. 11. Tom. VI. Nr. 1—5. 1891/92. 8⁰.
Mémoires couronnés. Collection in 8⁰. Tom. X. fasc. 5. Tom. XI. fasc. 1—4. 1892. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Mathemat. Ertesitö. (Mathematischer Anzeiger.) Bd. VIII. 6—9. IX. 1—9. 1890/91. 8⁰.
Természettudományi Értekezések (Naturw. Abhandlungen). Bd. XX. 1—4. Bd. XXI. 1, 2. 1890/91. 8⁰.
Mathematikai Értekezések (Mathemat. Abhandlungen). Bd. XIV. 4. 1891. 8⁰.
Mathematikai Közlemenyek (Mathem. Mittheilungen). Bd. XXIV. 1—7. 1890/91. 8⁰.
Mathematische und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. Bd. VIII und IX. Berlin und Budapest. 1891/92. 8⁰.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Mittheilungen. Bd. IX. Heft 6. 1891. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. XXI. Heft 10—12. XXII. 1—4. 1891/92. 4⁰.
A Magyar Kir. Földtani entézet évkönyve. Bd. IX. 7. X. 1. 1892. 8⁰.
Jahresbericht für 1890. 1892. 8⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. Entrega 18. 1891. Fol.

Revista Argentina de historia natural in Buenos Aires:

Revista. Tom. I. entr. 6. 1891. 8⁰.

Society of natural Sciences in Buffalo:

Bulletin. Vol. V. Nr. 3. 1891. 8⁰.

Institut météorologique de Roumanie in Bukarest:

Annales. Tom. V. 1889. 1892. 4⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:

Almanaque náutico para 1893. Madrid 1891. 8⁰.

Société Linnéenne in Caen:

Bulletin. Vol. 5. fasc. 3. 4. 1891. 1892. 8⁰.
Bulletin mensuel de la commission météorologique du Calvados. 1891 Juillet—Déc. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Report on the Administration in 1889—90. 1891. Fol.
Report on the Meteorology of India. XV. year. 1891. Fol.
Monthly Weather Review. May — July 1891. Fol.
Meteorological Observations. Mai — July 1891. Fol.

Indian Museum in Calcutta:

W. L. Sclater, List of Snakes in the Indian Museum. 1891. 8⁰.

The Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXIV. part 4. XXV. part 1. 1891/92. 4⁰.
Memoirs. Vol. XXIII. 1891. 4⁰.
Palaeontologia Indica. Ser. XIII. Vol. IV. part 2. 1891. Fol.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VII. part 5. 1892. 8⁰.
Transactions. Vol. XV. part 2. 1891. 4⁰.

Museum of comparative zoölogy at Harvard College in Cambridge, Mass.

Annual Report for 1890—91. 8⁰.
Bulletin. Vol. XXII. Nr. 1—4. XXIII. Nr. 1, 2. 1891/92. 8⁰.
Memoirs. Vol. XVII. Nr. 2. 1892. 4⁰.

Astronomical Observatory at Harvard College in Cambridge, Mass:

Annals. Vol. XXVI. part 1. 1891. 4⁰.
46th annual Report for the year ending October 31, 1891. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bullettino mensile. Fasc. 23—25. 1892. 8⁰.
Atti. Serie IV. Vol. 3. 1891. 4⁰.

Editorial Committee in Christiania:

The Norwegian North-Atlantic Expedition 1876 — 1878. Zoology. Crinoidea. By D. C. Danielssen. 1892. Fol.

Norwegisches meteorologisches Institut in Christiania:

Jahrbuch für 1889. 1891. 4°.

K. Norwegische Universität in Christiania:

Archiv für Mathematik. Bd. XV. Heft 1. 1891. 8°.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 32. Heft 3. 1891. 8°.

Journal of comparative Neurology in Cincinnati:

Journal. Vol. I. pag. 287—358. Vol. II. pag. 1—23. 1891/92. 8°.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

1891. Nr. 101—104. 1892. Nr. 1—48. Fol.

Colorado scientific Society in Denver, Co.:

Proceedings. Vol. III. part 3. 1890. 8°.
On the ore-deposits of Newman Hill, by John B. Farish. 1892. 8°.
The nature of the chemical Elements by Charles Skeele Palmer. 1892. 8°.

Meteorologisches Observatorium der Universität Dorpat:

Meteorologische Beobachtungen. Bd. 5. Heft 3. 1892. 8°.

Royal Irish Academy in Dublin:

Transactions. Vol. XXIX. part 17. 1891. 4°.
Proceedings. III. Ser. Vol. II. Nr. 2. 1892. 8°.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XVIII. pag. 261—374. 1891. 8°.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VI. part 3. 1892. 8°.

Royal physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1890—91. 1892. 8°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. Vol. 13. disp. 4. 1890. Vol. 14. disp. 4. 1891. Vol. 15. disp. 1. 1892. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:

Helios. Monatliche Mittheilungen 1891—1892, Nr. 7—10. 8⁰.
Societatum litterae. 1891. Nr. 9—12. 8⁰.

Commission géodésique fédérale in Genf:

Nivellement et précision de la Suisse. Livr. IX, X. 1891. 4⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Vol. supplementaire. Centenaire de la fondation de la Société. 1891. 4⁰.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Giessen:

28. Bericht. 1892. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Nachrichten. 1891. Nr. 8—11. 1892. Nr. 1—3. gr. 8⁰.

K. Sternwarte in Göttingen:

Astronomische Nachrichten. Herausg. v. Wilh. Schur. Theil II. 1891. 4⁰.

Lebensversicherungs-Bank für Deutschland in Gotha:

63. Rechenschaftsbericht für 1891. 1892. 4⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. VI. part 1. 1891. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Greifswald:

Mittheilungen. 23. Jahrg. 1892. 8⁰.

K. Niederländische Regierung in Haag:

J. A. C. Oudemans, Die Triangulation von Java. Abth. III. 1891. Fol.

Leopoldinisch-Karolinische deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 27. Nr. 23, 24. Heft 28. Nr. 1—10. 1891/92. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 64. Heft 4, 5, 6. Leipzig 1891/92. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Hannover:

40. und 41. Jahresbericht für 1889/90 und 1890/91. 1892. 8⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:

Oeuvres complètes de Christiaan Huygens. Tom. IV. La Haye 1891. 4⁰.
Natuurkundige Verhandelingen. 4de Verz. Deel V. 2de stuk. Harlem 1892. 4⁰.
Archives Néerlandaises. Tom. 26. livr. 1. 1892. 8⁰.

Naturhistorisch-medizinischer Verein in Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Bd. IV. Heft 5. 1892. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:

Fennia 4. 1891. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mittheilungen. 41. Jahrg. 1891. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Bd. III. Abth. 1. 1889. Fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 26. Heft 3 und 4. 1892. 8⁰.

Section médicale de la Société des Sciences expérimentales à l'Université de Kharkow:

Trudy. Tam 1. 1891. 8⁰.

Kommission z. wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Ergebnisse der Beobachtungsstationen 1891. Heft 1—3. 1892. 4⁰.
Atlas deutscher Meeresalgen. Heft II. Lief. 3—5. 1892. Fol.

Naturwissenschaftlicher Verein in Kiel:

Schriften. Bd. IX. 2. 1892. 8⁰.

Aerztlicher naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:

2. Heft der Zeitschrift Értesitö. 1891. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Höhenschichtenkarte von Ost- und Westpreussen. Section: Danzig, Bromberg und Königsberg. 3. Blatt. 1891.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Kopenhagen:

Mémoires. Classe des Sciences. Tom. V. Nr. 4. Tom. VII. Nr. 3, 4. 1891. 4⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Pamietnik matematik. Tom. 18. Nr. 1. 1891. 3⁰.
Rozprawy matemat. Tom. 21. 23. 1891. 8⁰.

Sprwokzdani fizyjograf. Tom. 25. 26. 1890. 8⁰.
Zbiór antropolog. Tom. 14. 15. 1890/91. 8⁰.
Rotula, Distributio plantarum in montibus Tatricis. 1889—90. 8⁰.
Atlas geologiczny IV. 1891. Fol.

Société Vaudoise des Sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 3e Serie. Vol. XXVII. Nr. 105, 106. 1892. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Teil XI. Heft 1. 1892. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. 26. Jahrg. Heft 4. 27. Jahrg. Heft 1. 1891/92. 8⁰.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Berichte der mathem.-physikalischen Classe 1891. Heft III, IV, V. 1892. Nr. 1. 1891/92. 8⁰.
Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe. Bd. XVIII. Nr. 2—6. 1892. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 45. Heft 1—11. 1892. 8⁰.

University of Nebraska in Lincoln:

5th annual Report of the Agricultural Experiment Station. 1891. 8⁰.
Bulletin of the Agricultural Experiment Station. Vol. V. Nr. 21. 1892. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Löwen:

La Cellule. Tom. VII. Fasc. 2. 1891. 4⁰.

Her Majesty's Government in London:

Report of the scientific Results of the Voyage of H. M. S. Challenger. Deep Sea Deposits. 1891. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XIII. part 2. 1892. 8⁰.
List of the Members 1891. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 50. Nr. 303—306. Vol 51. 308. 309. 1891/92. 8⁰.
Catalogue of scientific Papers (1874—1883). Vol. IX. 1891. 4⁰.

Royal Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 52. Nr. 2—7. 1891/92. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. Nr. 350—355. Jan. bis July 1892 u. Supplem. Number to Vol. 59 and 60. 1892. 8⁰.
Proceedings. Session 1890—91 Nr. 94. Session 1891—92 Nr. 104—110. Session 1892—93 Nr. 111—113. 1891/92. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1892. part I—III. 8⁰.
List of Fellows. 1892. 8⁰.

Zoological Society in London:

Transactions. Vol. XIII. part 4. 1892. 4⁰.
Proceedings. 1891. part IV und Index 1881—1890. 1892. part. I. 1892. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Vol. 45. Nr. 1156—1174. Vol. 46. Nr. 1175—1179. 1891/92. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Vol. XVIII. Fasc. 2. XIX. Fasc. 1. 1891/92. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. II. Ser. Tom. XVII. 1892. 8⁰.

Institut Grand-Ducal (Section des sciences naturelles) in Luxemburg:

Publications. Tom. XXI. 1891. 8⁰.
Observations météorologiques de 1884—1888. 1890. 8⁰.

Government of Madras (India):

Results of Observations of the fixed stars at Madras in the years 1871—1873. 1892. 4⁰.
Results of the Meteorological Observations at Madras 1861—1890. 1892. 4⁰.

Real Academia de ciencias in Madrid:

Memorias. Tome XV. 1890/91. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht und Abhandlungen 1891. 1892. 8⁰.

Observatorio meteorológico magnético in México:

Boletin mensual. Tom. III. Nr. 3. 1892. 4⁰.

Sociedad cientifica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias y revista. Tom. V. Nr. 3—6. 1892. 8⁰.

Sociedad Mexicana de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Serie. Tomo 2. Nr. 1. 1891. Fol.

Deutscher wissenschaftlicher Verein in Mexico:

Mittheilungen. Bd. I. Heft 4. 1892. Fol.

Minnesota Academy of natural sciences in Minnapolis:

Bulletin. Vol. III. Nr. 2. 1891. 8⁰.

Società dei Naturalisti in Modena:

Atti. Ser. III. Vol. X. Fasc. 2. 1892. 8⁰.

Zoological Survey of Canada in Montreal:

Annual Report. (New Series). Vol. IV. 1888—89. 1890. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1891. Nr. 2—4. 1892. Nr. 1. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, Cal.:

Reports on the Observations of the total eclipse of the Sun. Dec. 21—22, 1889. Sacramento 1891. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 1891. Nr. 10—12. 1892. Nr. 1—4. 4⁰.

K. Staatsministerium des Innern in München:

C. W. v. Gümbel, geognostische Beschreibung der fränkischen Alb. Kassel 1891. 4⁰.

K. Staatsminisierium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:

Veröffentlichung der K. Württembergischen Commission für die internationale Erdmessung. Heft III. 1892. 4⁰.

Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserverhältnisse im Deutschen Rheingebiet. Heft I, II. Berlin 1891. Fol.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. I. 1891. 1892. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. II. Vol. V. Fasc. 1—12. Vol. VI. Fasc. 1—5. 1891/92. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. X. Heft 2. 1891. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in Newcastle upon Tyne:

Transactions. Vol. 40. part 4. Vol. 41. part 1, 2. 1891/92. 8⁰.

American Journal in New-Haven:

The American Journal of Science. Vol. 42. Nr. 250—252. Octob. bis Dec. 1891. Vol. 43. Nr. 253—256. Jan. bis April 1892. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. V. Nr. 1—3. 1891. 8⁰.
Transactions. Vol. X. Nr. 2—6. 1891. 8⁰.

The Journal of comparative medecine in New-York:

Journal. Vol. XII. Nr. 2, 3. 1892. 8⁰.

American Museum of natural History in New-York:

Bulletin. Vol. III. Nr. 2. 1891. 8⁰.

American chemical Society in New-York:

Journal. Vol. XIII. Nr. 9. 10. XIV. 2. 3. 1891/92. 8⁰.

Geological Society of America in New-York:

Bulletin. Vol. I. II. 1890/91. 8⁰.

American geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XXIII. Nr. 4. XXIV. Nr. 1. 1891/92. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XVI. 2. u. mathem. Abtheilung. Tom. XII. 1892. 8⁰.

Canadische Regierung in Ottawa:

Documents relatifs à l'unification de l'heure. 1891. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Bullettino. Tom. 5. Nr. 2. 1892. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VI. Fasc. 1, 2. 1892. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri et Architetti in Palermo:

Atti del Congresso degli Ingegneri e degli Architetti in Palermo nel 1892, parte I. 1892. 4⁰.
Studio preliminare o programma di progetto di un canale intermarittimo Venezia—Spezia, per G. A. Romano e G. Fiandra. Con tavole illustrative. Venezia 1889. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1892. Nr. 1—25. 8⁰.

Académie des Sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 114. Nr. 1—25. 1892. 4⁰.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 601—606. Janvier—Juni 1892. 4⁰.

Société de géographie a Paris:

Comptes rendus. 1891. Nr. 19. 20. 1892. Nr. 1—11. 8⁰.
Bulletin. IV. Sér. Tom. XII. 3ᵉ et 4ᵉ trimestre 1891. 1891/92. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XIX. Nr. 7. 8. XX. Nr. 1. 2. 1891/92. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XVI. Nr. 9, 10. XVII. Nr. 1—5. 1891/92. 8⁰.
Mémoires. Tom. IV. part. 5. Tom. V. part. 1—3. 1891/92. 8⁰.

Zeitschrift L'Électricien in Paris:

L'Électricien. II. Sér. Tom. III. Nr. 53. 55—78. 1892. gr. 8⁰.

Académie Impériale des Sciences in St. Petersburg:

Mémoires. VII. Série. Tom. XXXVIII. Nr. 4—8. Tom. XXXIX. 1891. 4⁰.
Bulletin. Nouv. Série. Tom. 2. Nr. 3. 4. 1892. 4⁰.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XI. Fasc. 2, 1892. 8⁰.

Chemisch.-physikal. Gesellschaft an der Universität tn St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXIII. Heft 9. XXIV. 1—4. 1891/92. 8⁰.

Institut Impérial de médecine expérimentale in St. Petersburg:

Archives. Tom. I. Nr. 1, 2. 1892. 4⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Repertorium für Meteorologie. Bd. XIV. 1891. 4⁰.
Annalen. Jahrg. 1890. Theil. II. 1891. 4⁰.

Société des Naturalistes in St. Petersburg:

Trudy. Vol. XXI. Livr. 2. Vol. XXII. 1890/91. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1891, part II u. III. 1891. 8⁰.

Pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings. 39th annual Meeting 1891. 8⁰.

Second Geological Survey of Pennsylvania in Philadelphia:

Eastern middle Anthracite Field. Atlas. Part III, IV, VI. 1889. 8⁰.
Report of Progress. 1888/89. 1891. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. 1. Memorie. Vol. VI. Fasc. 3.
2. Processi verbali. Vol. VIII. pag. 1—84. 1892. 4⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Casopis. Bd. XXI. 1—4. 1892. 8⁰.
Vyročni zpráva. 1890—91. 8⁰.

Verein für Natur- und Heilkunde in Presburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. 7. 1891. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Revista. Anno VI. 1891. Nr. 11 u. 12. Anno VII. 1891/92. Nr. 1. 4⁰.

Rochester Academy of Science in Rochester:

Proceedings. Vol. I. Nr. 2. 1891. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Rendiconti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Vol. I. 1 Semestre. Fasc. 1—10. 1892. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1891. Nr. 4. 1892. Nr. 1. 8⁰.

Rassegna delle scienze geologiche in Italia in Rom:

Rassegna. Anno I. Fasc. 3. 4. Roma 1892. 8⁰.

Ufficio Centrale meteorologico in Rom:

Annali. Serie II. Vol. IX. parte 1—5. 1887. 1890. 4⁰.

American Association for the Advancement of science in Salem:

Proceedings. 39th Meeting at Indianopolis, Aug. 1890. 1891. 8⁰.

Essex Institute in Salem:

Bulletin. Vol. 21. Nr. 7—12. 1889. Vol. 22. Nr. 1—12. 1890. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht über die Thätigkeit 1889/90. 1891. 8⁰.

California Academy of Sciences in San Francisco:

Proceedings. II. Series. Vol. III, part 1. 1891. 8⁰.

R. Accademia dei Fisiocritici in Siena:

Atti. Ser. IV. Vol. III. Fasc. 10. e supplemento. 1891/92. gr. 8⁰.

Nordisches Museum in Stockholm:

Führer durch die Sammlungen des nordischen Museums in Stockholm, herausg. von Arthur Hazelius. 1888. 8⁰.
Program för en byggnad åt Nordiska Museet i Stockholm. 1883. 8⁰.
Förslag till byggnad för Nordiska Museet. 1891. Fol.
Le Musée d'éthnographie Scandinave à Stockholm, notice historique par J. H. Kramer. 2. éd. 1879. 8⁰.
Samfundet för Nordisca Museets främjande 1889. Meddelanden. 1891. 8⁰.
Das Nordische Museum in Stockholm. Stimmen aus der Fremde. 1888. 8⁰.
Afbildningar af föremål i Nordiska Museet. Småland. 1888. 4⁰.
Afbildningar af föremål i Nordiska Museet. Island. 1890. 4⁰.
Runa. Minnesblad från Noreiska Museet. 1888. Fol.
Samfundet. 1881—1888. 8⁰.
Minnen från Nordiska Museet. Bd. II. s. a. 4⁰.
Gabriel Djurklou, Lifvet i Västergötland. 1885. 8⁰.

Société des Sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. 27. Fasc. 1—6. Janv.—Juin 1892. 8⁰.

Australasian Association for the advancement of Science in Sydney:

Report. Vol. III. New-Zealand Meeting 1891. 1892. 8⁰.

Department of Mines in Sydney:

Records of the Geological Survey of New-South-Wales. Vol. I. part 1—4. 1889—92. 4⁰.
Memoirs. Palaeontology. Nr. 8. 1891. 4⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. XXV. 1891. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya, Mexico:

Boletin. Tom. I. Nr. 7—9. 1891/92. 4⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Magnetische Beobachtungen im Jahre 1890. 1891. 8⁰.
Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1890. 1891. 8⁰.
Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Jahre 1884 und 1885. 1886/91. 8⁰.

College of scieuce, Imperial University in Tokio, Japan:

Journal. Vol. part 1. 1892. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- uud Völkerkunde Ostasiens in Tokio:

Mittheilungen. 47. Heft. Yokohama 1892. Fol.

Reale Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. XXVII. disp. 1—8. 1891/92. 8⁰.

Observatoire météorologique de l'Université in Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. XXIII. 1891. 1891/92. Fol.

U. S. Departuent of Agriculture in Washiugton:

North American Fauna. Nr. 5. 1891. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Jos. Henry, Eulogy on Prof. Alex. Dallas Bache. 1872. 8⁰.
Meteorological Observations made at Providence by Alexis Caswell. 1860. 8⁰.
Discussion of the magnetic und meteorological Observations by A. Bache. Part II. 1862. 4⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Observations for 1886. 1891. 4⁰.
Observations made during the year 1887. 1892. 4⁰.

Nautical Almanac Office in Washington:

Astronomical Papers of the American Ephemeris. Vol. II. part VI. Vol. III. part V. 1891. 4⁰.

U. S. Geological Survey in Washiugton:

Tenth Annual Report 1888—89 in 2 parts. 1890. 4⁰.
Bulletin. Nr. 62. 65. 67—81. 1890—91. 8⁰.
Contributions to North American Ethnology. Vol. II. 1. 2. VI. 1890. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein des Harzes in Wernigerode:

Schriften. Bd. VI. 1891. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Denkschriften. Mathematisch-naturwissensch. Klasse. 1891/92. 4⁰.
Sitzungsberichte. Mathematisch-naturwissensch. Klasse.
Abtheilung I 1891. Nr. 1—7
" IIᵃ " Nr. 1—7
" IIᵇ " Nr. 1—7
" III " Nr. 1—7. 1891—91. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1891. Nr. 15—18. 1892. Nr. 1—5. 4⁰.
Jahrbuch. Bd. 41. Heft 2. 3. 1892. 4⁰.

K. K. Oesterreichische Gradmessungs-Commission in Wien:

Astronomische Arbeiten. 1891. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1892. Nr. 1—22. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXI. Heft 4—6. Bd. XXII. Heft 1. 2. 1891/92. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXXIV. 1891. 8⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. 41. Bd. Quartal 3 und 4. 1891. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. VI. Nr. 3, 4. VII. 1, 2. 1891/92. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. Bd. 31. 1890/91. 1891. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. XXV. N. 6. 7. XXVII. 1—3. 1891/92. 8⁰.
Sitzungsberichte. 1891. Nr. 4—9. 1892. 1—3. 1891/92. 8⁰.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen. 26. Jahrg. 1892. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrschrift. Jahrg. 36. Heft 2—4. 1891. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Lucien Anspach in Brüssel:

Le rôle de l'eau dans les cylindres à vapeur. 2891. 8⁰.

Julius Bergbohm in Wien:

Neue Integrationsmethoden. Stuttgart 1892. 8⁰.

O. Chwolson in St. Peterburg:

Ueber den gegenwärtigen Zustand der Actinometrie. 1892. 4⁰.

Darget in Pauilhac (Gers):

Theories géométriques diverses. Auch 1892. 4⁰.

Karl Gegenbauer in Heidelberg:

Die Epiglottis. Vergleichend-anatomische Studie. Leipzig 1892. 4⁰.

Friedrich Goppelsröder in Mühlhausen i. E.:

Studien über die Anwendung der Elektrolyse. 1891. Fol.

Irving Hale in Denver, Colorado:

The present limitations of electric power in Mining. 1892. 8⁰.

Josef Bernh. Jack in Konstanz:

Botanische Wanderungen am Bodensee und im Hegau. Freiburg 1892. 8⁰.
Hepaticae Wallisianae. 1892. 8⁰.

A. Kirchhoff in Berlin:

Bericht der Central-Commission für wissenschaftliche Landeskunde 1889—1891. 1891. 8⁰.

A. v. Kölliker in Würzburg:

Ueber den feineren Bau des Bulbus olfactorius. 1892. 8⁰.

A. Kurz in Augsburg:

Zur Bildungs- und Gymnasialfrage. 1892. 8⁰.
Ueber Luft-Elektrizität. 1892. 8⁰.

Ferdinand v. Müller in Melbourne:

Iconography of Australian salsolaceous plants. VIIIth Decade. 1891. 4⁰.

G. Omboni in Padua:

Frutto fossile di pino. Venezia 1892. 8⁰.

L. Rütimeyer in Basel:

Die eocäne Säugethier-Welt von Egerkingen. Zürich 1891. 4⁰.

Paul Schreiber in Chemnitz:

Untersuchung über die Periodicität des Niederschlages im Königreich Sachsen. (Ausschnitt.) 1891. 4⁰.

Adolf Steinheil in München:

Handbuch der angewandten Optik. I. Band. Leipzig 1891. 8⁰.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen Nr. 79. 1892. 8⁰.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathemathisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. November 1892.

1. Herr L. BOLTZMANN überreicht und bespricht eine Abhandlung: „III. Theil der Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft.“

2. Herr E. LOMMEL legt das von ihm herausgegebene Werk: „G. L. OHM's gesammelte Abhandlungen“ der Classe vor.

3. Herr L. SOHNCKE macht Mittheilungen über wissenschaftliche Luftfahrten des Münchener Vereins für Luftschifffahrt. Im Anschlusse an diese Mittheilung des Herrn SOHNCKE und auf Anregung desselben giebt die Classe folgende Erklärung ab:

> „Die Ausführung wissenschaftlicher Luftfahrten, wie sie vom Münchener Verein für Luftschiffahrt in grösserem Maasse als bisher geplant werden, ist von Wichtigkeit für die Ergründung der physikalischen Verhältnisse der Atmosphäre. Besonders verspricht die Wiederholung solcher von München aus zu unternehmenden Fahrten, mit Rücksicht auf die Nachbarschaft meteorologischer Hochstationen, eine wesentliche Förderung der Wissenschaft.“

4. Herr L. Radlkofer theilt Einiges über den Verlauf und die Ergebnisse des im Herbste dieses Jahres in Genua stattgefundenen internationalen botanischen Congresses mit.

5. Herr M. v. Pettenkofer zeigt an, dass die Liebig-Fleischextract-Compagnie in Fray-Bentos in den Pampas ausgegrabene wohlerhaltene Knochen eines grossen diluvialen Säugethieres, nach den Photographien wahrscheinlich eines Mastodons, der Akademie zum Geschenk gemacht habe.

III. Teil der Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft.

Von Ludwig Boltzmann.

(*Eingelaufen 5. November.*)

I think, that a problem of such primary importance in molecular science ought to be scrutinized and examined on every side, so that as many persons as possible may be enabled to follow the demonstration.
Maxwell, scient. pap. II pag. 713.

§ 1. Ueber die Variabeln, welche den Ausdruck für die lebendige Kraft auf eine Summe von Quadraten reducieren.

Maxwell hat zuerst[1]) die Formel für die Verteilung der lebendigen Kraft unter einatomigen Gasmolekülen aufgestellt, welche er als vollkommen harte Kugeln von gleicher oder verschiedener Beschaffenheit (Masse und Radius) voraussetzte. Er behandelte daselbst auch den Fall, dass die Moleküle harte Körper mit drei verschiedenen Hauptträgheitsmomenten sind, und fand, dass für ein solches Gas das Verhältnis der spezifischen Wärmen $1^1/_3$ sein müsste. Da dasselbe jedoch für die bekanntesten einfachen Gase den Wert 1,4 hat, so schloss er, dass in diesem Punkte die mechanische Analogie mit der Erfahrung im Widerspruch steht.[2])

1) Illustrations of the Dynamical Theory of Gases. Phil. mag. jan. and june 1860. scient. pap. I pag. 377.
2) Maxwell, scient. pap. pag. 409.

Es ist ein eigentümliches Verhängnis gewesen, dass Maxwell, dem mit solcher fast unbegreiflicher Leichtigkeit die Lösung des Problems sowohl für Kugeln als auch für solche Körper geglückt war, welche keine Rotationsachse besitzen, nicht schon damals auf die verhältnismässig naheliegende Idee kam, vollkommen glatte und harte von der Kugelgestalt verschiedene Rotationskörper zu betrachten. Er hätte in diesem Falle genau das gewünschte Verhältnis der spezifischen Wärmen 1,4 erhalten.

Der Beweis, welchen Maxwell damals für sein Verteilungsgesetz der lebendigen Kraft gab, wurde von ihm selbst später als unzureichend bezeichnet und er gab in einer zweiten Abhandlung[1]) einen exakten Beweis, dass die von ihm gefundene Verteilung der lebendigen Kraft eine mögliche ist, d. h. dass sie, wenn einmal unter den Gasmolekülen hergestellt, durch die Zusammenstösse nicht verändert wird.

Dieser Beweis sowie der Satz Maxwells selbst liessen sich bedeutend erweitern und letzterer zeigte den engsten Zusammenhang mit einem weit allgemeineren Theorem, das für beliebige Systeme gilt, in denen beliebige Kräfte wirksam sind.[2]) Bei dem Versuche, letzteres noch weiter zu verallgemeinern,[3]) beging jedoch Maxwell ein Versehen, da seine Voraussetzung, dass man durch passende Wahl der Coordinaten immer bewirken könne, dass der Ausdruck für die lebendige Kraft nur die Quadrate der Momente enthält, wie Lord Kelvin zeigte, im allgemeinen unzulässig ist. Dieses Versehen lässt sich jedoch leicht korrigieren, wenn man

1) Phil. mag. IV, vol. 35, 1868, scient. pap. II pag. 26.

2) Boltzmann, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. d. Wissensch. Bd. 58, 63, 66, 72, 74, 76.

3) Maxwell, on Boltzmanns theorem on the average distribution of energie. Cambr. phil. trans. vol. XII, part. III, 1878, scient. pap. II pag. 713.

4) Nature, 13. August 1891.

Maxwells Schlüsse verhältnissmässig unbedeutend modificiert. Um diess zu zeigen, knüpfen wir ganz an die zuletzt citierte Abhandlung Maxwells an und verstehen wie Maxwell (scient. pap. pag. 720) unter $b_1, b_2 \cdots b_n$ generalisierte Coordinaten, unter $a_1, a_2 \cdots a_n$ die betreffenden Momente. Wir müssen dann bei dem Ausdrucke 42 Maxwells (l. c. pag. 724) stehen bleiben und also für lebendige Kraft schreiben

$$T = \tfrac{1}{2}[11]\,a_1^2 + [12]\,a_1\,a_2 \cdots$$

Alle Schlüsse Maxwells bis incl. zur Gleichung 29 (l. c. pag. 722) sind vollkommen richtig. Um auch die weiteren Schlüsse einwurfsfrei zu machen, könnte man statt Maxwells Deduction von da ab die folgende setzen. Wir wollen unter α lineare Functionen der Momente a verstehen, also setzen:

$$\alpha_h = \sum_{k=1}^{k=n} c_{hk}\, a_k$$

Dann können wir die Coefficienten c immer so wählen, dass 1. ihre Determinante Θ gleich eins, also

$$\Theta = \begin{vmatrix} c_{11}\; c_{12} \cdots \\ c_{21} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = 1$$

ist und 2. die doppelte lebendige Kraft die Form

$$2\,T = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i\, \alpha_i^2$$

annimmt.

Dabei sind die Coefficienten c und μ Functionen der generalisierten Coordinaten $b_1 \cdots b_n$, die α dagegen werden im Allgemeinen nicht als Momente aufgefasst werden können, welche zu irgend welchen generalisierten Coordinaten gehören. Ich will sie daher, um jeden Zweifel zu beseitigen, Momentoide nennen.

Die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsachsen bei allseitiger Drehung eines festen Körpers sind ein Beispiel hiefür.

$\frac{1}{2}\mu_i\,\alpha_i^2$ will ich als den auf das Momentoid α_i entfallenden Teil der gesamten lebendigen Kraft bezeichnen. Wegen $\Theta = 1$ erhalten wir zunächst $d a_1\, d a_2 \cdot\cdot d a_n = d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdot\cdot d\alpha_n$. Führen wir links statt a_1, rechts statt α_1 die Variable T ein, so folgt

$$\frac{1}{\frac{dT}{da_1}}\, dT\, da_2\, da_3 \cdot\cdot da_n = \frac{1}{\frac{dT}{d\alpha_1}}\, dT\, d\alpha_2\, d\alpha_3 \cdot\cdot d\alpha_n$$

dividieren wir durch dT weg und berücksichtigen, dass

$$\frac{dT}{da_1} = \dot{b}_1,\ \frac{dT}{d\alpha_1} = \mu_1\,\alpha_1,$$

so folgt

$$\frac{1}{\dot{b}_1}\, da_2\, da_3\, ..\, da_n = \frac{1}{\mu_1\,\alpha_1}\, d\alpha_2\, d\alpha_3 \cdot\cdot d\alpha_n$$

Aus Maxwells Gleichung 28 (l. c. pag. 721) folgt für die Anzahl der Systeme, für welche die generalisierten Coordinaten zwischen den Grenzen b_1 und $b_1 + db_1 \cdots b_n$ und $b_n + db_n$, die Momentoide aber zwischen den Grenzen α_2 und $\alpha_2 + d\alpha_2 \cdot\cdot \alpha_n$ und $\alpha_n + d\alpha_n$ liegen, während α_1 durch die Gleichung der lebendigen Kraft bestimmt ist, der Wert

$$\frac{NC}{\mu_1\,\alpha_1}\, db_1 \cdot\cdot db_n\, d\alpha_2 \cdot\cdot d\alpha_n$$

Führt man nun die Integrationen genau so aus, wie es Maxwell thut, so gelangt man zu dessen Gleichung 45, welche somit vollständig richtig ist.

Bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, dass die auf das Momentoid α_n entfallende lebendige Kraft $\frac{\mu_n\alpha_n^2}{2}$ zwischen

den Grenzen k_n und $k_n + dk_n$ liegt, so gelangt man wieder genau zu dem Maxwellschen Ausdruck 51 (l. c. pag. 725).

Es stellen daher auch die Maxwellschen Ausdrücke 52 und 53 (l. c. pag. 726) den Mittelwert und den Maximalwert der auf irgend ein Momentoid entfallenden lebendigen Kraft dar. An Stelle des Maxwellschen Satzes, dass die mittlere lebendige Kraft für jede Coordinate den gleichen Wert hat, tritt daher der Satz, dass der Mittelwert der auf jedes Momentoid entfallenden lebendigen Kraft derselbe ist.

Da die Anzahl der Momentoide immer dieselbe ist, wie die der Beweglichkeitsgrade, so bleibt auch der von Maxwell eingangs (l. c. pag. 716) angeführte Satz richtig, dass die mittlere lebendige Kraft zweier gegebener Teile des Systems sich so verhält, wie die respektive Zahl ihrer Beweglichkeitsgrade. Dabei kann die lebendige Kraft T_k eines jeden der Teile nach Belieben auch die Produkte verschiedener p_k enthalten, wenn p_k die Momente der allgemeinen Coordinaten des betreffenden Teiles sind. Aber es darf T_k nicht das Produkt eines p_k in ein anderes Moment enthalten, welches nicht zu den p_k gehört. Speziell also für sogenannte mehratomige Gasmoleküle, deren Zustand durch verallgemeinerte Coordinaten bestimmbar ist, wird der Satz unverändert gelten.

Da $2 \frac{\partial T}{\partial b}$ jedenfalls gleich $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i^2 \frac{\partial \mu}{\partial b}$ ist, so bleibt auch mein Beweis des zweiten Hauptsatzes[1]) richtig, worin jedoch ebenfalls unter q_h nicht die zu den Coordinaten p_h gehörigen Momente, sondern die Momentoide verstanden werden müssen.

---

1) Borchard-Kronecker's Journal Bd. 100, pag. 201, 1885.



Ueber die von Lord Kelvin als Stichproben (test-cases) vorgeschlagenen speziellen Fälle.

§ 2. Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene.

Ich glaube, dass unter diesen Modifikationen der Beweis Maxwells für die im vorigen Paragraphen erwähnten Lehrsätze ein befriedigender ist; ausserdem habe ich schon früher[1]) einen auf ganz anderer Basis beruhenden Beweis dieses Satzes geliefert. Ich glaube daher, dass seine Richtigkeit als Lehrsatz der analytischen Mechanik kaum angezweifelt werden kann.[2]) Da ich selbst nur mühsam durch Betrachtung vieler speziellen Fälle[3]) zu meinem Satz gelangte, so weiss ich den Wert einer steten Erläuterung allgemeiner Sätze durch spezielle Beispiele zu schätzen und will mich daher noch mit einigen der von Lord Kelvin a. a. O. als Stichproben vorgeschlagenen speziellen Beispielen beschäftigen und zwar zunächst mit dem letzten, weil es das einfachste ist, und weil

1) Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen, 1. Abschnitt: Bewegung der Atome in den Molekülen. Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. Band 3, 9. März 1871. — Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht, ebd. 13. April 1871; in der letzten Abhandlung habe ich auch schon von generalisierten Coordinaten Gebrauch gemacht.

2) Eine hievon völlig getrennte Frage ist die, ob solche Systeme eine genügend durchgreifende Analogie mit warmen Körpern zeigen. Diese Frage soll hier nicht erörtert werden; vergleiche jedoch hierüber Wiedemanns Beiblätter Bd. 5 pag. 403, 1881.

3) Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft. Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. Bd. 58, 8. Oktober 1868, — Lösung eines mechanischen Problemes, ebd. 17. Dezember 1868. — Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht, Schluss des 2. Abschnittes. (l. c.) — Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie. Wien. Sitz.-Ber. Bd. 75. 11. Jänner 1877. Schluss des 3. Abschnittes etc.

ich den von Herrn Tait einmal citierten Ausspruch de Morgans respektire, welcher ungefähr besagt, dass zu lange Formeln oft nicht gelesen werden.

Ein materieller Punkt von der Masse eins bewege sich in der xy-Ebene. x, y seien seine Coordinaten, q seine Geschwindigkeit, u, v deren Componenten in den Coordinatenrichtungen und θ deren Winkel mit der positiven Abscissenachse, den wir von Null bis 2π zählen. Das Potenzial V sei eine beliebige Funktion der Coordinaten. Wir nehmen an, dass die Bewegung nicht ins Unendliche geht, sich auch nicht assymptotisch einer gewissen Grenze nähert und dass alle möglichen Wertekombinationen von x, y und θ, welche mit der Gleichung der lebendigen Kraft vereinbar sind, mit beliebiger Annäherung erreicht werden, wenn sich nur das Bewegliche durch eine genügend lange Zeit T bewegt.

Wir wollen senkrecht zur xy-Ebene eine z-Coordinate errichten und irgend einen Zustand des Beweglichen dadurch charakterisieren, dass wir über dem Punkte der xy-Ebene, wo sich das Bewegliche befindet, den Winkel θ als z-Coordinate auftragen, welchen seine Geschwindigkeit mit der positiven Abscissenachse bildet. Den Punkt des Raumes mit den Coordinaten x, y, θ nennen wir dann den Punkt, welcher den Zustand des Beweglichen charakterisiert oder kurz den augenblicklichen Zustandspunkt.

Wir können unsere Annahme dann dahin aussprechen, dass der Zustandspunkt im Verlauf der Zeit T alle Punkte eines endlichen Cylinders (des Zustandscylinders) durchläuft, welcher die Höhe 2π in der Richtung der z-Achse hat. Von der Basis bis zur Gegenfläche dieses Cylinders und umgekehrt macht der Zustandspunkt stets einen Sprung; sonst geschieht seine Bewegung kontinuierlich.

Wir nehmen nun an, dass zu irgend einer Zeit t das Bewegliche sich in irgend einem Punkte x, y befinde, dass seine Geschwindigkeit mit der positiven Abscissenachse den

Winkel θ bilde und in den Coordinatenrichtungen die Componenten u, v habe. Der Zustandspunkt befindet sich also zur Zeit t an der Stelle A des Raumes, welche die Coordinaten x, y, θ hat.

Nach Verlauf einer sehr kleinen Zeit δt also zur Zeit $t + \delta t$ soll das Bewegliche die Coordinaten x', y' haben. Seine Geschwindigkeit soll mit der positiven Abscissenachse den Winkel θ' bilden und in den Coordinatenrichtungen die Componenten u', v' haben.

Die Lage des Zustandspunkts zur Zeit $t + \delta t$ soll mit A' bezeichnet werden. A' soll der dem Punkte A entsprechende Punkt heissen. Betrachten wir δt als constant, so wird jedem Punkte innerhalb des Zustandscylinders ein anderer Punkt daselbst entsprechen. Jedesmal, wenn sich zu irgend einer Zeit der Zustandspunkt in irgend einem Raumpunkte befunden hat, wird er sich nach Verlauf der Zeit δt in dem diesem Raumpunkte entsprechenden befinden; und umgekehrt kann er niemals nach dem entsprechenden Punkte kommen, ohne genau vor der Zeit δt in demjenigen Raumpunkte gewesen zu sein, dem der vorhergenannte Raumpunkt entspricht.

Bekanntlich ist:

$$x' = x + q\cos\theta \cdot \delta t,\quad y' = y + q\sin\theta \cdot \delta t \qquad 1)$$
$$u' = u + \xi \cdot \delta t,\quad v' = v + \eta \cdot \delta t$$

wobei $\xi = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $\eta = -\frac{\partial V}{\partial y}$ die Componenten der auf das Bewegliche wirkenden Kraft, also Funktionen von x und y sind. Ferner ist

$$\theta' = \operatorname{arctg}\frac{v'}{u'},$$

was nach Substitution der obigen Werte liefert

$$\theta' = \theta + (\eta \cdot \cos\theta - \xi\sin\theta)\frac{\delta t}{q}. \qquad 2)$$

Wir konstruieren nun ein unendlich kleines, rechtwinkliges Parallelepiped $dx dy d\theta$, dessen eine Ecke im Punkte A liegt. Derjenige Bruchteil der gesammten Zeit T, während dessen der Zustandspunkt innerhalb dieses Parallelepipedes liegt, sei dt. Es ist dies die Zeit, während welcher die 3 Variabeln x, y, θ zwischen den Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$, θ und $\theta + d\theta$ eingeschlossen sind. Wir können dann jedenfalls setzen:

$$dt = f(x, y, \theta)\, dx\, dy\, d\theta \qquad 3)$$

Wir konstruieren nun zu jedem Punkte des Parallelepipedes $dx dy d\theta$ den entsprechenden Punkt, wodurch das Parallelepiped $dx' dy' d\theta'$ erhalten werden soll. Derjenige Bruchteil der Zeit T nun, während dessen der Zustandspunkt innerhalb $dx' dy' d\theta'$ liegt, ist nach Formel 3)

$$dt' = f(x', y', \theta')\, dx'\, dy'\, d\theta'.$$

Da aber nach unserer Definition der Zustandspunkt, so oft er in das Parallelepiped $dx\, dy\, d\theta$ eingetreten ist, jedesmal nach der Zeit δt in das Parallelepiped $dx'\, dy'\, d\theta'$ eintritt, und auch die Zeitdifferenz zwischen dem Austritte aus dem 1. und 2. Parallelepipede wieder genau δt ist, so folgt, dass der Zustandspunkt in beide Parallelepipede genau gleich oft eintritt und auch jedesmal in beiden gleich lang verweilt, dass also $dt' = dt$ oder

$$f(x', y', \theta')\, dx'\, dy'\, d\theta' = f(x, y, \theta)\, dx\, dy\, d\theta$$

ist. Nun ist aber

$$dx'\, dy'\, d\theta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial y}, & \frac{\partial x'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y'}{\partial x}, & \frac{\partial y'}{\partial y}, & \frac{\partial y'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x}, & \frac{\partial \theta'}{\partial y}, & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{vmatrix} \cdot dx\, dy\, d\theta.$$

Da δt const, $q^2 = \text{const} - 2V$ ist, so liefert die Gleichungen 1) und 2)

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + \xi \cos\theta \cdot \frac{\delta t}{q}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 + \eta \sin\vartheta \cdot \frac{\delta t}{q}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = 1 - (\xi \cos\theta + \eta \sin\theta)\frac{\delta t}{q}$$

Vernachlässigt man die Glieder von der Ordnung δt^2, so reduciert sich aber die Funktionaldeterminante auf

$$\frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = 1,$$

man hat also

$$dx'\,dy'\,d\theta' = dx\,dy\,d\theta$$

und daher auch $f(x', y', \theta') = f(x, y, \theta)$. Da man nun vom Parallelepipede $dx'\,dy'\,d\theta'$ wieder zu dem diesem entsprechenden, dann wieder zu dem dem neuen entsprechenden u. s. w. übergehen kann, so folgt, dass $f(x, y, \theta)$ überhaupt constant, daher $dt = C\,dx\,dy\,d\theta$ ist. Es stimmt diess vollkommen mit dem schon in meiner bereits citierten Abhandlung „Lösung eines mechanischen Problems“ gefundenen Resultate.

Lord Kelvin bezeichnet mit $N d\theta\, dr$ die Zahl, wie oft während der Zeit T das Bewegliche ein Flächenelement, dessen Länge in der Bewegungsrichtung ds, dessen Breite senkrecht darauf dr ist, so durchsetzt, dass dabei θ zwischen θ und $\theta + d\theta$ liegt. Da das Bewegliche jedesmal die Zeit $ds : q$ in dem Flächenelement zubringt, so ist der Bruchteil von T, während dessen das Bewegliche in $dr\,ds$ weilt und zugleich θ zwischen θ und $\theta + d\theta$ liegt,

$$\frac{N}{q} dr\,ds\,d\theta.$$

Da aber nach dem eben gefundenen diese Zeit

$$C\,dr\,ds\,d\theta$$

sein muss, so folgt $N = Cq$. Es ist also N vom Winkel θ

vollständig unabhängig und nicht nur Lord Kelvins Coefficient A_1, sondern auch A_2 und alle folgenden verschwinden.

Ich kann kaum bezweifeln, dass Lord Kelvin von diesem Resultate seiner Stichprobe befriedigt sein wird.

§ 3. Ueber die Verteilung der lebendigen Kraft unter Kelvins Dublets.

Die übrigen Beispiele Lord Kelvins beziehen sich auf ein Theorem, welches zwar in innigem Zusammenhange mit dem früher besprochenen steht; aber doch keineswegs damit identisch, noch auch ein specieller Fall davon ist; nämlich auf das Problem des Wärmegleichgewichtes unter mehratomigen Gasmolekülen. Es lässt sich bei diesem letzteren Probleme immer leicht von einer bestimmten Verteilung der lebendigen Kraft beweisen, dass sie weder durch die innere Bewegung der Moleküle, noch durch die Zusammenstösse verändert wird.

Seien $p_1, p_2 \cdots p_n$ die generalisierten Coordinaten, durch welche die Lage aller Bestandtheile eines Moleküles gegen dessen Schwerpunkt einschliesslich der Drehung desselben bestimmt ist. $q_1, q_2 \cdots q_n$, die dazu gehörigen Momente, T die gesammte lebendige Kraft des Moleküles und V die Potentialfunktion der inneren Kräfte desselben, u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten seines Schwerpunktes, endlich A und h Constanten; dann ist dies diejenige Verteilung der lebendigen Kraft, wo die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche die Variabeln $u, v, w, p_1, p_2 \cdots p_n, q_1, q_2 \cdots q_n$ zwischen den Grenzen u_1 und $u_1 + du_1 \cdots q_n$ und $q_n + dq_n$ liegen, gleich $Ae^{-h(V+T)}du \cdots dq_n$ ist. Sind mehrere Gattungen von Molekülen vorhanden, so muss die Constante h, nicht aber A für alle denselben Werth haben.

Die Richtigkeit dieses Resultates in den von Lord Kelvin vorgeschlagenen Spezialfällen zu verificieren, halte ich

für so leicht, dass ich mich nicht damit aufhalten will. Der zweite Beweis dagegen, dass die durch obige Formel ausgedrückte Verteilung der lebendigen Kraft die einzig mögliche ist, lässt sich nur indirekt durch den Nachweis erbringen, dass eine gewisse eigentümliche Funktion durch die Zusammenstösse nur vergrössert werden kann. Da diese Funktion einerseits mit der von Clausius als Entropie bezeichneten Grösse, anderseits mit der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Zustandes auf's innigste zusammenhängt,[1]) so erscheint dadurch der zweite Hauptsatz als ein reiner Wahrscheinlichkeitssatz.

Diesen letzteren Beweis für das von Lord Kelvin ersonnene, mit elastischen Federn ausgestattete Molekül, welches wir nach seinem Vorgange Dublet nennen wollen, durchzuführen, scheint mir von genügendem Interesse zu sein (siehe Motto!). Unter einem Dublet verstehen wir die Vereinigung zweier materieller Punkte mit den Massen m und m'', welche sich mit einer ihrer Entfernung proportionalen Kraft anziehen. m'' (der Kern) soll sonst niemals von einer anderen Kraft afficiert werden. Die Massen m (Schalen) je zweier Dublets sollen, wenn sie sich bis zur Distanz D'' nähern, wie elastische Kugeln an einander abprallen. Ausserdem sollen noch einfache Atome mit den Massen m' vorhanden sein, welche unter einander in der Distanz D', an den Schalen in der Distanz D ebenso abprallen. Wir wollen immer kurz „Schale“ statt Centrum der Schale und „Kern“ statt Centrum des Kerns sagen. Es seien x, y, z die Coordinaten des Kerns eines Dublets bezüglich eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Schale liegt und dessen Axen fixe Richtungen haben; u'', v'', w'' die absoluten, $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die Geschwindigkeitscomponenten des Kernes relativ gegen die Schale, g, h, k die Geschwindigkeitscomponenten des Schwer-

1) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 76, 1877, Bd. 78, 1878.

punkts des Dublets, u, v, w, die der Schale; u_1, v_1, w_1 die eines einzelnen Atoms; endlich $\chi(x, y, z, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, g, h, k)\, d\xi \cdot\cdot dk$ die Anzahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variabeln $x \cdot\cdot k$ zur Zeit t zwischen den Grenzen

$$x \text{ und } x + dx \cdots k \text{ und } k + dk$$

liegen und

$$f(u_1, v_1, w_1)\, du_1\, dv_1\, dw_1$$

die Zahl der Einzelatome in der Volumeneinheit, deren Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 zwischen den Grenzen

$$u_1 \text{ und } u_1 + du_1,\; v_1 \text{ und } v_1 + dv_1,\; w_1 \text{ und } w_1 + dw_1$$

liegen. Dann ist der Ausdruck, welcher durch die Zusammenstösse nur abnehmen kann und welchen wir kurz die Entropie nennen,

$$E = \int \chi l \chi dx \cdot\cdot dk + \int f l f du_1\, dv_1\, dw_1$$

wobei die Integration über alle möglichen Werte der differentiierten Grössen zu erstrecken ist. l bedeutet den natürlichen Logarithmus. Der erste Addend im Ausdrucke E kann folgendermassen erhalten werden. Wir bilden die Grösse $l\chi$ für jedes in der Volumeneinheit enthaltene Dublet; d. h. wir setzen in $l\chi$ für alle Variabeln diejenigen Werte ein, welche sie für das betreffende Dublet haben. Alle die Werte von $l\chi$ summieren wir dann. Wir wollen daher, um diese Bildungsweise symbolisch auszudrücken, diesen Addenden mit $\Sigma l\chi$ bezeichnen. Aehnlich bezeichnen wir den 2. Addenden mit Σlf, was eine Summation über alle in der Volumeneinheit befindlichen Einzelatome ausdrückt.

Um zu beweisen, dass E nur abnehmen kann, suchen wir zuerst die Veränderung, welche $\Sigma l\chi$, wenn keine Zusammenstösse stattfänden, bloss durch die relative Bewegung von Kern und Schale in den Dublets erführe. Dadurch würden offenbar g, h, k gar nicht verändert. Dagegen könnte man zu irgend einer Zeit t setzen

$$x = A \sin(at + B), \quad \mathfrak{u} = Aa \cos(at + B)$$

und zur Zeit 0

$$x_0 = A \sin B, \quad \mathfrak{u}_0 = Aa \cos B.$$

Betrachtet man alle Dublets, für welche A und B zwischen gewissen, unendlich nahen Grenzen eingeschlossen sind, so ist

$$dx\, d\mathfrak{u} = dx_0\, d\mathfrak{u}_0 = Aa\, dA\, dB \qquad 4)$$

und ebenso für die y- und x-Axe

$$dy\, d\mathfrak{v} = dy_0\, d\mathfrak{v}_0, \quad dz\, d\mathfrak{w} = dz_0\, d\mathfrak{w}_0. \qquad 5)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung

$$dx\, dy\, dz\, d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}\, d\mathfrak{w} = dx_0\, dy_0\, dz_0\, d\mathfrak{u}_0\, d\mathfrak{v}_0\, d\mathfrak{w}_0$$

auch gilt, wenn Kern und Schale eine beliebige andere Centralbewegung machen. (Vgl. meine schon citierte Abhandlung über das Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gasmolekülen.) Würden nun gar keine Zusammenstösse erfolgen, so würden genau für dieselben Dublets, für welche zur Zeit Null die Variabeln zwischen den Grenzen x_0 und $x_0 + dx_0 \cdots k$ und $k + dk$ lagen, dieselben zur Zeit t zwischen den Grenzen x und $x + dx \cdots k$ und $k + dk$ liegen. Schreiben wir daher für einen Augenblick unter dem Functionszeichen χ noch die Variable t explicit, um den Fall einer Veränderlichkeit von χ mit der Zeit nicht von vorne herein auszuschliessen, so ist die Zahl der ersten Dublets

$$\chi(x_0 \cdots \mathfrak{w}_0, g, h, k, 0)\, d\xi_0 \cdots dk = \chi_0\, d\xi_0 \cdots dk$$

die der letzteren aber

$$\chi(x \cdots k, t)\, dx \cdots dk = \chi\, dx \cdots dk.$$

Daher hat man

$$\chi_0\, dx_0 \cdots dk = \chi\, dx \cdots dk$$

und wegen 4) und 5)

$$\chi_0 = \chi,$$

daher auch

$$\chi_0\, l\chi_0\, dx_0 \cdots dk = \chi\, l\chi\, dx \cdots dk.$$

Die Integration dieser letzten Gleichung über alle möglichen Werte der Variabeln, deren Differentiale sie enthält, zeigt sofort, dass die Grösse $\Sigma l\chi$ durch die innere Bewegung der Dublets keine Veränderung erfährt, was natürlich auch für jede Centralbewegung richtig bleibt. Es bleibt daher nur der Einfluss der Zusammenstösse zu berechnen.

Wir wollen da zunächst statt $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, g, h, k$ die absoluten Geschwindigkeiten u, v, w, u'', v'', w'' einführen. Da $(m + m'')\, g = mu + m'' u''$, $\mathfrak{u} = u'' - u$, so folgt

$$dg\, d\mathfrak{u} = du\, du''.$$

Setzen wir daher die Anzahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variabeln $x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w$ zwischen den Grenzen x und $x + dx \cdots w$ und $w + dw$ liegen, gleich $F(x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w)\, dx \cdots dw$, wobei

$$F = \chi\left(x, y, z, u'' - u \cdots \frac{mu + m''u''}{m + m''} \cdots\right),$$

so wird

$$\sum l\chi = \int FlF\, dx \cdots dw = \sum lF,$$

wo die Summation wieder über alle in der Volumeneinheit enthaltenen Dublets zu erstrecken ist. Wir bezeichnen nun mit $\delta_1 \Sigma lF$ den Zuwachs, welchen ΣlF durch die Zusammenstösse der Dublets unter einander, mit $\delta_2 \Sigma lf$, denjenigen, den Σlf durch die Zusammenstösse der Einzelatome untereinander und mit $\delta_{12} (\Sigma lF + \Sigma lf)$ denjenigen Zuwachs, den die eingeklammerte Grösse durch die Zusammenstösse je eines Dublets mit einem Einzelmolekül während der Zeit δt erfährt.

Um $\delta_{12} (\Sigma lF + \Sigma lf)$ zu berechnen, heben wir von allen Zusammenstössen, welche eine Schale mit einem Einzelatom in der Volumeneinheit während der Zeit δt erfährt, diejenigen hervor, für welche die Geschwindigkeitscomponenten der Schale im Momente des Stosses (aber noch vorher) zwischen den Grenzen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$, die des Kerns zwischen den Grenzen u'' und $u'' + du''$,

v'' und $v''+dv''$, w'' und $w''+dw''$, die Coordinaten des Kerns relativ gegen die Schale zwischen x und $x+dx$, y und $y+dy$, z und $z+dz$, ferner die Geschwindigkeitscomponenten des gemeinsamen Schwerpunktes der Schale und des Einzelatoms zwischen den Grenzen p und $p+dp$, q und $q+dq$, r und $r+dr$, endlich die Richtung der Centrilinien der stossenden Atome im Momente des Stosses innerhalb eines unendlich schmalen Kegels von bestimmter Richtung im Raume und unendlich kleiner Oeffnung $d\lambda$ liegt. Die Geschwindigkeitscomponenten des Einzelatomes im Momente des Beginnes des Stosses sind dann

$$u_1 = \frac{m+m'}{m'}\, p - \frac{m}{m'}\, u, \quad v_1 = \frac{m+m'}{m'}\, q - \frac{m}{m'}\, v, \qquad 6)$$
$$w_1 = \frac{m+m'}{m'}\, r - \frac{m}{m'}\, w.$$

Für die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeneinheit während der Zeit δt in der hervorgehobenen Weise geschehen, findet man leicht den Wert:

$$dn = D^2 \cdot F(x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w)\, f(u_1, v_1, w_1)$$
$$\times\, V\varepsilon\, dx \cdot \cdot\, dw''\, du\, dv\, dw\, du_1\, dv_1\, dw_1\, d\lambda\, \delta t,$$

Hiebei ist V die relative Geschwindigkeit beider Atome im Momente des Stosses, ε der Cosinus des spitzen Winkels derselben mit der Centrilinie. Führen wir statt u_1, v_1, w_1 die Variabeln p, q, r mittelst der Gleichungen 6) ein, so folgt

$$dn = D^2 F f_1 \frac{(m+m')^3}{m'^3}\, V\varepsilon\, dx \cdot \cdot\, dw''\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda\, \delta t,$$

wobei der unten angehängte Index 1 jedesmal ausdrückt, dass unter dem Funktionszeichen die drei Werte 6) zu substituieren sind.

Durch jeden der hervorgehobenen Zusammenstösse verliert eine Schale die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w, durch alle dn Zusammenstösse wird also $\Sigma l F$ um $dn\, lF$ vermindert.

Nach jedem der hervorgehobenen Zusammenstösse sollen die Geschwindigkeitscomponenten der Schale zwischen den Grenzen u' und $u'+du'$, v' und $v'+dv'$, w und $w'+dw$, liegen. Dadurch, dass Schalen mit diesen neuen Geschwindigkeitscomponenten geschaffen werden, wächst ΣlF um $dnlF'$, wobei der oben angehängte Strich ausdrückt, dass unter dem Funktionszeichen $x \cdots w''$, u', v', w' zu substituieren ist. Wir nehmen an, dass die Zusammenstösse momentan geschehen, weshalb die Variabeln $x \cdots w''$ durch die Zusammenstösse nicht verändert werden. Es hat daher ΣlF durch die hervorgehobenen Zusammenstösse im Ganzen den Zuwachs $(lF'-lF)\,dn$ erhalten. Ganz ebenso findet man, dass Σlf durch die hervorgehobenen Zusammenstösse während der Zeit δt den Zuwachs $(lf_1'-lf_1)\,dn$ erhalten hat, wobei die beiden Indices unten und oben ausdrücken, dass unter dem Funktionszeichen die Geschwindigkeitscomponenten des stossenden Einzelatoms nach dem Stosse

$$u_1' = \frac{m+m'}{m'}p - \frac{m}{m'}u', \quad v_1' = \frac{m+m'}{m'}q - \frac{m}{m'}v', \qquad 7)$$

$$w_1' = \frac{m+m'}{m'}x - \frac{m}{m'}w'$$

zu substituieren sind. Der gesammte Zuwachs, den $\Sigma lF + \Sigma lf$ durch alle hervorgehobenen Zusammenstösse erfährt, ist daher $dn\,(lF' + lf_1' - lF - lf_1)$. Hieraus würde der gesammte Zuwachs, welchen wir mit $\delta_{12}\,(\Sigma lF + \Sigma lf)$ bezeichneten, durch Integration über alle Variabeln erhalten, deren Differenziale in dn enthalten sind.[1])

1) Nimmt man an, dass das zweite der zusammenstossenden Atome kein Einzelatom, sondern ebenfalls eine Schale gewesen ist, so gelangt man durch vollkommen analoge Schlüsse zur vollkommen analogen Gleichung

$$2\,\delta_1 \Sigma lF = \int dn\,(lF' + lF_1', - lF - lF_1).$$

Diese Integration soll nun durch einen eigentümlichen Kunstgriff bewerkstelligt werden. Mit dem obigen Gliede, welches die „hervorgehobenen" Zusammenstösse in das Integrale liefern, vereinigen wir das Glied, welches die „entgegengesetzten" Zusammenstösse liefern, und ebenso mit jedem andern Gliede des Integrales das durch die „entgegengesetzten" Zusammenstösse gelieferte Glied.

Wir sagen ein Zusammenstoss ist einem anderen entgegengesetzt, wenn beim ersteren jedes der stossenden Atome im Momente des Beginnes genau denselben Zustand hat, wie beim letzteren im Momente des Endes und umgekehrt; ausserdem müssen natürlich die Mittelpunkte der beiden Atome vertauscht sein, damit vor dem Stosse Annäherung stattfindet. Die übrigen Variabeln $x \cdots w''$ sollen für beiderlei Zusammenstösse genau zwischen denselben Grenzen eingeschlossen sein. In der nebenstehenden Zeichnung soll der grösste Kreis eine Schale, der kleinste einen Kern, der mittlere ein Einzelatom darstellen; die vom Centrum aus gezoge-

---

Dabei ist

$$F_1 = F(x_1, y_1, z_1, u_1'', v''_1, w''_1, u_1, v_1, w_1)$$
$$F_1' = F(x_1, y_1, z_1, u_1'', v_1'', w_1'', u_1', v_1', w_1').$$

u_1, v_1, w_1 und u_1', v_1', w_1', die Geschwindigkeitscomponenten der zweiten Schale vor und nach dem Stosse muss man sich wieder durch Gleichungen ausgedrückt denken, die den Gleichungen 6 und 7 analog sind. x_1, y_1, z_1, u_1'', v_1'', w_1'' sind die übrigen, den Zustand des zweiten Dublets im Momente des Stosses bestimmenden Grössen. Endlich ist

$$dn = D''^2 F F_1 \, V\varepsilon \, dx \cdots dw'' \, du \, dv \, dw \, dx_1 \cdots dw_1'' \, dp \, dq \, dr \, d\lambda \, \delta t.$$

Ebenso würde sich ergeben

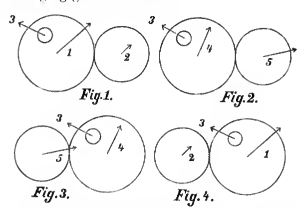
$$2\delta_2 \Sigma l f = \int dn \, (l f' + l f'_1 - l f - l f_1),$$

wobei

$$dn = D'^2 f f_1 \, V\varepsilon \, du \, dv \, dw \, dp \, dq \, dr \, d\lambda \, \delta t.$$

Die angewandten Zeichen dürften hier ohne weiters verständlich sein.

nen Pfeile sind die Geschwindigkeiten. Fig. 1 bedeutet die Constellation vor einem, Fig. 2 die nach demselben Zusammenstosse; Fig. 3 und 4 aber sind die Constellationen vor und nach dem umgekehrten Zusammenstosse. Pfeile, die mit gleicher Ziffer bezeichnet sind, haben immer gleiche Länge und gleiche Lage gegen die Centrilinie.



Für alle Zusammenstösse, welche den früher hervorgehobenen entgegengesetzt verlaufen, liegen im Momente des Beginnes die Geschwindigkeitscomponenten der stossenden Schale zwischen den Grenzen

$$u' \text{ und } u' + du', \quad v' \text{ und } v' + dv', \quad w' \text{ und } w' + dw',$$

im Momente des Endes aber zwischen den Grenzen

$$u \text{ und } u + du, \quad v \text{ und } v + dv, \quad w \text{ und } w + dw.$$

Aehnliches gilt vom stossenden Einzelatome, wogegen die Bewegung des Schwerpunktes, die Grösse der relativen Geschwindigkeit und deren Winkel mit der Centrilinie für die entgegengesetzten Zusammenstösse ebenso gross ist wie für die ursprünglich hervorgehobenen. Durch jeden entgegengesetzten Zusammenstoss verliert eine Schale die Geschwindigkeitscomponenten u', v', w', ein Einzelatom die Geschwindigkeitscomponenten u_1', v_1', w_1', dagegen gewinnt eine

Schale die Componenten u, v, w, ein Einzelatom die Componenten u_1, v_1, w_1. Ist daher dn' während der Zeit δt in der Volumeneinheit die Zahl der den ursprünglich hervorgehobenen entgegengesetzten Zusammenstösse, so wächst durch diese letzteren $\Sigma l F + \Sigma l f$ um

$$dn' (lF + lf_1 - lF' - lf_1').$$

Daher wächst es durch die ursprünglich hervorgehobenen und die ihnen entgegengesetzten Stösse zusammen um

$$(lF' + lf_1' - lF - lf_1) \quad (dn - dn').$$

Integriert man diesen Ausdruck über alle Werte der Variabeln, deren Differenziale in dn und dn' enthalten sind, so erhält man $2\,\delta_{12}\,(\Sigma lF + \Sigma lf)$, da man dann jeden Zusammenstoss doppelt zählt; einmal als ursprünglich hervorgehobenen, dann als entgegengesetzten. Da V, ε und $d\lambda$ durch den Stoss nicht geändert werden, so ist

$$dn' = D^2 F' f_1' \frac{(m^3+m')^3}{m'^3} V\varepsilon\, dx \cdots dw'' du' dv' dw' dp\, dq\, dr\, d\lambda\, \delta t.$$

Man findet zudem leicht (am leichtesten auf geometrischem Wege) $du' dv' dw' = du\, dv\, dw$ und erhält daher

$$\delta_{12}\,(\Sigma lF + \Sigma lf) = \frac{\delta t}{2} \int (lF' + lf_1' - lF - lf_1) \qquad 8)$$

$$(Ff_1 - F'f_1') \frac{(m+m')^3}{m'^3} V\varepsilon D^2 du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, dx \cdots dw''\, d\lambda.$$

Man sieht sofort, dass sich in derselben Weise ergibt:

$$\delta_1\,\Sigma lF = 2\,\delta t \int (lF' + lF_1' - lF - lF_1)\,(FF_1 - F'F_1') \cdot$$
$$\cdot\, V\varepsilon\, D''^2 dx \cdots dw''\, dx_1 \cdots dw_1''\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda$$

$$\delta_2\,\Sigma lf = 2\,\delta t \int (lf' + lf_1' - lf - lf_1)\;(ff_1 - f'f_1') \cdot$$
$$\cdot\, V\varepsilon\, D'^2\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda, \qquad 9)$$

wobei die Bezeichnungen dieselben sind, wie in der Anmerkung auf Seite 346.

Wir beschränken uns hier bloss auf die Betrachtung des stationären Zustands, wo F und f für alle Zeiten dieselben Funktionen der darin vorkommenden Variabeln sind. Für diesen sind die betrachteten Ursachen die einzigen, welche eine Veränderung von $\Sigma l F$ und $\Sigma l f$ bewirken könnten. Es ist daher die gesamte Veränderung, welche F während δt erfährt,

$$\delta E = \delta_{12} (\Sigma l F + \Sigma l f) + \delta_1 \Sigma l F + \delta_2 \Sigma l f.$$

Da alles, folglich auch E, unverändert bleibt, muss $\delta E = 0$ sein. Nun haben aber in den Integralen der Formeln 8) und 9) beide eingeklammerte Faktoren wesentlich das entgegengesetzte Vorzeichen, während die übrigen Grössen wesentlich positiv sind. Die Grösse unter den Integralzeichen ist daher wesentlich negativ und die Summe der Integrale, welche in δE erscheint, kann nur verschwinden, wenn für jeden Zusammenstoss:

$$F' f_1' = F f_1, \; F' F'_1 = F F_1, \; f' f_1' = f f_1 \qquad 10)$$

ist.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, dass die Schalen für einander vollständig durchdringlich sind, ebenso die Einzelatome für einander; nur zwischen einer Schale und einem Einzelatome soll jedesmal in der Distanz D Abprallen stattfinden. Dann bleibt nur die erste der Gleichungen 10), die aber für jeden möglichen Stoss gelten muss. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit $\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}$ eines Einzelatoms mit c_1, so ist f_1 offenbar nur Funktion von c_1, F dagegen kann als Funktion der folgenden 6 Variabeln ausgedrückt werden: 1. der beiden Geschwindigkeiten c und c'' von Schale und Kern, 2. der Distanz ϱ derselben (natürlich ihrer Centra), 3. der Winkel α und α'' der Richtungen von c und c'' mit der Geraden ϱ (letztere von der Schale gegen den Kern gezogen), 4. des Winkels β der Ebenen ϱc und $\varrho c''$.

Wir fassen nun einen Stoss ins Auge und bezeichnen die Werte dieser Variabeln im Momente des Stosses, jedoch noch vor demselben, ohne obern Index, die unmittelbar nach dem Stosse dagegen oben mit einem Striche; wir können offenbar die Lage der Centrilinie im Momente des Stosses und die Richtung von c_1 so wählen, dass c, α und β nach dem Stosse ganz beliebige Werte c', α', β' annehmen, welche für den Wert c_1' der Variabeln c_1 nach dem Stosse reelle Werte liefern; dieser letztere ist durch die Gleichung der lebendigen Kraft $m' c_1'^2 + m c'^2 = m' c_1^2 + m c^2$ bestimmt. Die Werte der Variabeln c'', ϱ und α'' dagegen werden durch den Stoss nicht verändert. Die erste der Gleichungen 10) kann daher so geschrieben werden:

$$F(c'', \alpha'', \varrho, c, \alpha, \beta) \cdot f_1(c_1) = F(c'', \alpha'', \varrho, c', \alpha', \beta') \cdot$$
$$\cdot f_1\left(\sqrt{c_1^2 + \frac{m}{m'}(c^2 - c'^2)}\right)$$

Diese Gleichung muss für alle möglichen Werte der Variabeln c'', α'', ϱ, c, α, β, c', α', β' und c_1 erfüllt sein, woraus man mit Leichtigkeit findet:

$$f_1(c_1) = A_1 e^{-hm'c_1^2}, \quad F = A e^{-hmc^2}.$$

Hiebei sind A_1 und h reine Constanten; A dagegen kann noch die Variabeln c'', ϱ und α'' enthalten.

Man sieht sofort, dass hieraus die Gleichheit der mittleren lebendigen Kraft einer Schale und eines Einzelatoms folgt, und dass die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung unter den Schalen und Einzelatomen erwiesen ist, ohne dass man Zusammenstösse der Schalen untereinander und der Einzelatome untereinander anzunehmen braucht. Die Annahme, dass auch solche Zusammenstösse vorkommen, ändert an der Verteilung der lebendigen Kraft gar nichts, da durch die gefundenen Werte von f_1 und F die beiden anderen der Gleichungen 10) identisch erfüllt werden. Dagegen wird

durch den Umstand, dass der Kern keinerlei Stösse erfährt, die Giltigkeit des Satzes auch für diesen zwar nicht gestört, aber der Beweis erheblich erschwert. Denn würde auch der Kern Stösse erfahren, so würde sofort folgen, dass F von c'' in derselben Weise wie von c abhängt, und wir wären zu Ende. So aber müssen wir mit die Centralbewegung der Dublets weiterrechnen.

Man beweist zunächst leicht, dass bei der gefundenen Zustandsverteilung für jede Wertecombination von c'', ϱ, α'' die Werte von c, α, β durch die Zusammenstösse jede Veränderung durchschnittlich genau ebenso oft, wie die gerade entgegengesetzte erfahren. Werden daher auch gewisse Formen der Centralbewegung plötzlich durch einen Zusammenstoss zerstört, so entstehen doch wieder anderswo umgekehrt durch Zusammenstösse ebenso oft wieder dieselben Formen und es müsste daher dasselbe Verteilungsgesetz der Centralbewegungen auch fortbestehen bleiben, wenn plötzlich alle Zusammenstösse aufhörten.

Es ist nun sonderbar, dass gerade für das einfache, von Lord Kelvin angenommene Gesetz der Proportionalität der Centralkraft mit ϱ die nun noch nötige Rechnung am weitschweifigsten wird. Um daher nicht gezwungen zu sein, den angezogenen Satz M. Morgan's allzusehr zu ignorieren, will ich ein anderes Gesetz, z. B. $a\varrho + \frac{b}{\varrho^3}$, oder irgend eines voraussetzen, wobei der Winkel zweier sich folgender Apsidenrichtungen im allgemeinen zu π in keinem rationalen Verhältnisse steht.

Die Gesamtenergie eines Dublets ist

$$L = \frac{mc^2}{2} + \frac{m''c''^2}{2} + \varphi(\varrho),$$

wobei φ die Potentialfunktion ist. Die doppelte Flächengeschwindigkeit der Centralbewegung (der Relativbewegung von Schale und Kern in der Bahnebene) ist

$$K = \varrho \sqrt{c^2 \sin^2 \alpha + c''^2 \sin^2 \alpha'' - 2cc'' \sin \alpha \sin \alpha'' \cos \beta},$$

die mit $m + m''$ multiplicierte Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Dublets ist

$$G = \sqrt{m^2 c^2 + m''^2 c''^2 + 2mm''cc'' (\cos \alpha \cos \alpha'' + \sin \alpha \sin \alpha'' \cos \beta)}$$

und sie hat senkrecht zur Bahnebene die Componente

$$H = \frac{cc'' \sin \alpha \sin \alpha'' \sin \beta}{\sqrt{c^2 \sin^2 \alpha + c''^2 \sin^2 \alpha'' - 2cc'' \sin \alpha \sin \alpha'' \cos \beta}}.$$

Die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche K, L, G, H zwischen den Grenzen

K und $K + dK$, L und $L + dL$, G und $G + dG$, H und $H + dH$

liegen, soll

$$\Phi (K, L, G, H)\, dK\, dL\, dG\, dH$$

heissen. Die Zahl derjenigen unter allen diesen Dublets, für welche noch ϱ zwischen ϱ und $\varrho + d\varrho$ liegt, ist

$$\Phi \cdot dK\, dL\, dG\, dH \cdot \frac{d\varrho}{\sigma} : \int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\sigma} = \Psi\, dK\, dL\, dG \cdot dH \frac{d\varrho}{\sigma}.$$

Hiebei ist $\sigma = \frac{d\varrho}{dt}$, $\int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\sigma}$ ist die Zeit, welche von einem Peri- bis zu einem Apocentrum vergeht, also eine gegebene Funktion von K, L, G, H; $\Psi = \Phi : \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sigma}$ ist ebenfalls eine Funktion dieser 4 Grössen. Beschränken wir uns auf jene Dublets, für welche 1. noch die letzte Apsidenlinie der Bahn mit einer in der Bahnebene einer fixen Ebene parallel gezogenen Geraden einen Winkel bildet, der zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, 2. die beiden durch die Geschwindigkeit des Schwerpunkts normal zur Bahnebene und parallel einer fixen Geraden Γ gelegten Ebenen einen Winkel bilden, der zwischen

ω und $\omega + d\omega$ liegt, und endlich 3. noch die Geschwindigkeitsrichtung des Schwerpunkts innerhalb eines Kegels von gegebener Richtung und unendlich kleiner Oeffnung $d\lambda$ fällt, so haben wir noch mit $d\varepsilon\, d\omega\, d\lambda : 16\pi^3$ zu multiplicieren. Die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, welche alle diese Bedingungen erfüllen, ist daher

$$\psi \cdot \frac{1}{16\pi^3\sigma}\, dK\, dL\, dG\, dH\, d\varrho\, d\varepsilon\, d\omega\, d\lambda. \qquad 11)$$

Bezeichnen wir mit g und $g + dg$, h und $h + dh$, k und $k + dk$ die Grenzen, zwischen denen für die Dublets die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes bezüglich der fixen rechtwinkligen Coordinatenaxen liegen, so ist

$$G^2\, dG\, d\lambda = dg\, dh\, dk.$$

Nun lassen wir g, h und k constant, legen durch die Schale (deren Centrum) ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Axe die Richtung von G hat, bezeichnen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des Kerns bezüglich dieses Systems mit x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1 und transformieren diese 6 Variabeln in K, L, H, ϱ, ε, ω. Wir führen da ein zweites Coordinatensystem ein, bezüglich dessen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der Schale mit $x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2$ bezeichnet werden sollen. Die z-Axe des 2. Systems soll senkrecht zur Bahnebene, die x-Axe in deren Durchschnittlinie mit der alten xy-Ebene liegen. Es ist dann

$$H = G \sin \vartheta,$$

wenn $90 - \vartheta$ der Winkel beider z-Axen ist; daher, weil G constant ist,

$$dH = G \cos \vartheta\, d\vartheta.$$

Endlich bezeichnen wir den Winkel der beiden x-Axen mit ω, da er sich von dem früher so bezeichneten Winkel jedenfalls nur um einen Betrag unterscheidet, den wir jetzt als constant zu betrachten haben. Wir finden:

$$z_2 = x_1 \cos\vartheta \sin\omega + y_1 \cos\vartheta \cos\omega + z_1 \sin\vartheta$$
$$w_2 = u_1 \cos\vartheta \sin\omega + v_1 \cos\vartheta \cos\omega + w_1 \sin\vartheta,$$

welche beide Ausdrücke verschwinden müssen, da die $x_2 y_2$-Ebene Bahnebene ist. Mittelst dieser beiden Gleichungen kann man bei constantem x_1, y_1, u_1, v_1 zunächst ϑ, ω statt z_1, w_1 einführen und findet

$$dz_1\, dw_1 = (y_1 u_1 - x_1 v_1) \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} d\vartheta\, d\omega.$$

Nun ist weiter

$$x_2 = x_1 \cos\omega - y_1 \sin\omega$$
$$y_2 \sin\vartheta = x_1 \sin\omega + y_1 \cos\omega$$

und analoge Gleichungen folgen für u_2, v_2, u, v. Daraus folgt

$$y_1 u_1 - x_1 v_1 = \sin\vartheta\,(y_2 u_2 - x_2 v_2) = K \sin\vartheta$$

und bei constantem ϑ und ω

$$dx_2\, dy_2 \sin\vartheta = dx_1\, dy_1; \quad du_2\, dv_2 \sin\vartheta = du_1\, dv_1,$$

daher

$$dx_1\, dy_1\, dz_1\, du_1\, dv_1\, dw_1 = K \cos\vartheta\, dx_2\, dy_2\, du_2\, dv_2\, d\vartheta\, d\omega.$$

Nun bezeichnen wir, wie früher, mit σ und τ die Geschwindigkeitscomponenten der Relativbewegung von Schale und Kern in der Richtung von ϱ und senkrecht darauf; dann ist bei constantem x_2 und y_2

$$d\sigma\, d\tau = du_2\, dv_2$$

$$K = \varrho\tau, \quad L = L_g + \frac{m m''}{2(m + m'')}(\sigma^2 + \tau^2) + \varphi(\varrho)$$

$$dK\, dL = \frac{m m''}{m + m''} \sigma\varrho\, d\sigma\, d\tau,$$

wobei L_g die jetzt constant betrachtete Energie der Schwerpunktsbewegung ist. Ist endlich ψ der Winkel zwischen ϱ und der letzten Apsidenlinie, so folgt

$$x_2 = \varrho \cos(\varepsilon + \psi), \quad y_2 = \varrho \sin(\varepsilon + \psi),$$

wobei ψ Funktion von ϱ, K und L ist; letztere beide sind jetzt constant, daraus folgt

$$\varrho \, d\varrho \, d\varepsilon = dx_2 \, dy_2.$$

Fasst man alles zusammen, so ist:

$$dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \, du_1 \, dv_1 \, dw_1 = \frac{m + m''}{m m''} \frac{K}{\sigma} \, dK \, dL \, dH \, d\varrho \, d\omega \, d\varepsilon$$

und man sieht sofort, dass, wenn sich Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten ohne Index auf ein beliebig gelegenes fixes Coordinatensystem beziehen, ebenfalls

$$dx \, dy \, dz \, du \, dv \, dw = \frac{m + m''}{m m''} \frac{K}{\sigma} \, dK \, dL \, dH \, d\varrho \, d\omega \, d\varepsilon$$

sein muss. Führen wir diess in den Ausdruck 11) ein und bedenken noch, dass bei constantem u, v, w

$$dg \, dh \, dk = \frac{m''^3}{(m + m'')^3} \, du'' \, dv'' \, dw'',$$

so findet man

$$\frac{1}{16 \pi^3} \frac{m m''^4}{(m + m'')^4} \frac{\psi}{K G_2} \, dx \, dy \, dz \, du \, dv \, dw \, du'' \, dv'' \, dw''$$

als die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variabeln $x \cdots w''$ zwischen x und $x + dx \cdots w''$ und $w'' + dw''$ liegen. Da wir für diese Zahl früher den Ausdruck

$$F \cdot dx \, dy \, dz \, du \, dv \, dw \, du'' \, dv'' \, dw''$$

fanden und sahen, dass F die Form haben muss Ae^{-hmc^2}, wobei A nur Funktion von c'', ϱ und α'' sein kann, so folgt, wenn wir jetzt setzen

$$F = B e^{-h(mc^2 + m''c''^2 + 2\varphi(\varrho))},$$

dass B einerseits nur Funktion von c'', ϱ und α'', anderseits nur Funktion von K, L, G und H sein kann.

Es muss B also eine solche Funktion dieser letzteren Variabeln sein, welche von den Werten von c, α und β ganz unabhängig und bloss Funktion von c'', ϱ und α'' ist. Setzen wir $\beta = 0$, so wird

$$K = \varrho\,(c'' \sin\alpha'' - c\sin\alpha)$$
$$G^2 = m^2c^2 + m''^2 c''^2 + 2\,mm''\,cc''\cos(\alpha'' - \alpha)$$
$$H = 0,$$

während

$$L = \frac{m\,c^2}{2} + \frac{m''c''^2}{2} + \varphi\,(\varrho)$$

ist. Die Elimination von c und α aus diesen Gleichungen liefert:

$$c''^2 \sin^2\alpha''\,[(m + m'')\,(2\,L - \varphi) - G^2] -$$
$$- K\sin\alpha''\,[m\,(2\,L - \varphi) + m''\,(m + m'')\,c''^2 - G^2] + mm''K^2 +$$
$$\varrho^2 \left\{ m''^2 c''^2 - m''(2L - \varphi) + \frac{1}{4mm''c''^2}[G^2 - m(2L - \varphi) + m'(m - m'')c''^2]^2 \right\}$$
$$= 0.$$

Denken wir uns aus dieser Gleichung etwa c'' bestimmt, so sollen wir erhalten $c'' = \chi\,(\alpha'', \varrho, L, G, K)$. Wir wissen nun, dass B sich sowohl als Funktion von c'', α'', ϱ, als auch von L, G, K muss ausdrücken lassen, also

$$B = F\,(\chi, \alpha'', \varrho) = \Phi\,(L, G, K).$$

Diese Gleichung muss auch für $\alpha'' = 0$ gelten; es muss also $F(\chi, 0, \varrho)$ bloss Funktion von L, G, K sein, welche wegen der Willkürlichkeit von c und α auch für $\alpha'' = 0$ noch independent sind. Für $\alpha = 0$ wird:

$$m''^2\,(m + m'')^2\,c''^4 + \qquad 12)$$
$$+ 2\,m''\,c''^2[(m - m'')\,D + 2\,m^2 m''\,\frac{K^2}{\varrho^2} + (\varphi - 2L)\,m\,(m + m'')] +$$
$$+ [D + m\,(\varphi - 2L)]^2 = 0.$$

Setzen wir

$$(m - m'') D - 2m(m + m'') L = \xi, \quad D - 2mL = \eta,$$
$$2m^2 m'' K^2 = \zeta,$$

so müsste sich $F(c'', \varrho)$ auf eine Funktion von ξ, η, ζ reducieren, wenn darin c'' durch Gleichung 12) als Funktion von ϱ, L, D, K ausgedrückt wird. Da durch Veränderung von c und α bewirkt werden kann, dass sich ξ und η unabhängig von c'', α'' und ϱ verändern, so muss auch

$$\frac{\partial F}{\partial c''} \cdot \frac{\partial c''}{\partial \xi} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial c''} \cdot \frac{\partial c''}{\partial \eta}$$

von ϱ unabhängig sein. Diess kann aber wegen

$$\frac{\partial c''}{\partial \zeta} = \varrho^2 \frac{\partial c''}{\partial \xi}$$

nur stattfinden, wenn entweder $\frac{\partial c''}{\partial \xi}$ oder $\frac{\partial F}{\partial c''}$ verschwindet.

Erstere Grösse hat den Wert

$$-\frac{c''}{2m''(m + m'')^2 c''^2 + 2\xi + \frac{2\zeta}{\varrho^2} + 2m(m+m'')\varphi}$$

kann also nicht allgemein verschwinden, da c'', ϱ, ξ und ζ auch für $\alpha'' = \beta = 0$ noch unabhängig von einander geändert werden können. Es muss also F von c'' und daher auch von ϱ unabhängig sein; daraus folgt sofort, dass es auch von α'' unabhängig ist, da ja α'' nicht als Funktion von L, G und K allein ausdrückbar ist. Es muss also F oder B eine Constante sein, womit die Verteilung der lebendigen Kraft endlich eindeutig bestimmt ist. Vorausgesetzt ist dabei noch, dass φ so beschaffen ist, dass Kern und Schale überhaupt beisammen bleiben, und auch nicht in einen Punkt zusammenschrumpfen, da sonst die obigen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen unzulässig werden.



Dass sich namentlich die zuletzt gemachten Schlüsse durch etwas einfachere ersetzen lassen, scheint mir wahrscheinlich; doch dürften auch in dieser Darstellung die allgemeinen Ursachen klar hervortreten, welche die Richtigkeit des Theorems unabhängig von den speciellen Details der Aufgabe verbürgen.

Ueber wissenschaftliche Luftfahrten des Münchener Vereins für Luftschiffahrt.

Von L. Sohncke.

(Eingelaufen am 5. November.)

Vor etwa drei Jahren ist in München ein Verein für Luftschiffahrt ins Leben getreten, der sich des regen Interesses weiter und hochangesehener Kreise erfreut; ich darf z. B. anführen, dass unter den 363 Mitgliedern sich 6 Prinzen des königlichen Hauses befinden. Der Verein ist in drei Abteilungen gegliedert; die erste derselben: die wissenschaftliche, verfolgt den Zweck, unsere Kenntnisse von der Physik der Atmosphäre zu fördern. Dass die Fahrten mit dem Vereinsballon volle Sicherheit bieten, dafür bürgt die thätige Teilnahme vieler Mitglieder der militärischen Luftschifferabteilung. Nur so ist es möglich, dass jede Fahrt von völlig Sachkundigen überwacht und geleitet wird.

Eine Anzahl der mit dem Vereinsballon ausgeführten Fahrten war ausdrücklich als „wissenschaftliche“ Fahrt vorbereitet und durchgeführt, wobei die thätige Teilnahme der k. b. meteorologischen Centralstation sich besonders wertvoll erwies. Aber auch bei mancher anderen Fahrt wurden sorgfältige Temperaturbeobachtungen mit dem Aspirationsthermometer gemacht, die schon zu interessanten Folgerungen geführt haben.

Obgleich die bisherigen wissenschaftlichen Arbeiten des Vereins naturgemäss mehr den Charakter von Vorstudien auf diesem schwierigen Gebiet tragen, so enthalten die beiden Jahresberichte des Vereins doch schon einige Abhandlungen mit nicht unwichtigen Ergebnissen, von denen hier einige angeführt seien.

Herr Professor Finsterwalder hat ermittelt, dass bei der wissenschaftlichen Fahrt am Mittag des 25. Juni 1890 in den verschiedenen Höhen mit grosser Annäherung solche Temperaturen beobachtet wurden, wie sie im aufsteigenden Luftstrom bei Condensation theoretisch gefordert werden. Theoretisch sollte unter den damaligen Verhältnissen die Condensation etwas oberhalb 1500 m Meereshöhe beginnen. Und thatsächlich drang der Ballon bei circa 1400 m Meereshöhe in Wolken ein, deren obere Grenze erst nach einer weiteren Steigung von 1000 m überschritten wurde.

Herr Dr. Erk hat eine Vereinsfahrt bearbeitet, die zwar nicht eine eigentlich wissenschaftliche war, bei der aber doch sorgfältige Temperaturbeobachtungen angestellt wurden. Sie wurde in der Mittagszeit des 11. Dezember 1890 ausgeführt. In 600 m über dem Boden drang der Ballon in eine sehr weit ausgedehnte, aber nur 100 m mächtige Wolkenschicht ein, die er während der ganzen weiteren Fahrt unter sich liess. Während unter und in der Wolkenschicht Temperaturen unterhalb des Eispunkts beobachtet wurden, herrschte oben viel höhere Temperatur, und zwar über 0°. Die Wolkenbank bildete die Grenze eines unteren kalten Ostwindes, der eine schwach aufsteigende Tendenz hatte, und eines oberen warmen Nordostwindes, dessen Erwärmung durch sein Herabsinken, also dynamisch, bedingt war.

Herr Dr. Erk und Herr Professor Finsterwalder haben gemeinsam diejenigen Beobachtungen bearbeitet, welche Herr Professor P. Vogel in dem v. Sigsfeldschen Ballon am 10. Juli 1889 Vormittags angestellt hat. Die

Fahrt ging nach Osten, etwas über Wasserburg hinaus. Gleichzeitig wurden stündliche Beobachtungen in Bayrisch-Zell und im Wendelsteinhaus gemacht. Aus den Barometerbeobachtungen an letzteren beiden Orten, deren Höhenunterschied ja bekannt ist, vermag man die Mitteltemperatur der Luftsäule abzuleiten, welche in jener Gebirgsgegend vom unteren zum oberen Niveau reicht. Vergleicht man damit die im Ballon innerhalb der entsprechenden Höhen beobachteten Temperaturen, so zeigt sich die Mitteltemperatur dieser Luftsäule in der freien Atmosphäre fern vom Gebirge etwa 2,3° niedriger. Der erwärmende Einfluss der Berghänge ist also keineswegs nur auf die unmittelbar am Boden anliegende Luft beschränkt, sondern betrifft die ganze in den Gebirgsfalten befindliche Luft.

Wenn so schon einzelne bemerkenswerte Ergebnisse gewonnen sind, so bleibt doch noch viel zu forschen übrig. Einige Aufgaben, welche die wissenschaftliche Abteilung demnächst in Angriff zu nehmen denkt, seien noch erwähnt.

Zur Gewinnung brauchbarer Data ist es nötig, den Stand des Barometers und Thermometers möglichst gleichzeitig abzulesen, was bei den berühmten wissenschaftlichen Hochfahrten Glaishers keineswegs erreicht war. Nach Professor Finsterwalders Vorschlag werden daher die neben einander aufgestellten drei Instrumente: Aneroid, Thermometer und Uhr, jedesmal auf dasselbe Blatt photographiert. Dies Verfahren verspricht sehr wertvolle Ergebnisse.

Ferner soll durch eine aus der Höhe aufgenommene Photographie bekannten Geländes die augenblickliche Ballonhöhe vermittelst photogrammetrischer Methoden — nach Professor Finsterwalders Angaben — bis auf $^1/_{1000}$ sicher bestimmbar sein. Hierdurch wird dann die Mitteltemperatur der Luftsäule aus der barometrischen Höhenformel bestimmbar, wenn gleichzeitig der Barometerstand abgelesen ist.

Eine besonders wichtige Aufgabe ist ferner die Beobachtung von Lufttemperaturen bei Nacht, weil alsdann die tagüber vom erwärmten Boden aufsteigenden Ströme warmer Luft keine Störung mehr herbeiführen können. Dazu werden im Hochsommer Nachtfahrten von Mitternacht bis zur Morgendämmerung auszuführen sein, und es wird versucht werden, zum Zweck des Photographierens der Angaben der Instrumente, momentane Beleuchtung mit Glühlampen anzuwenden, weil andere Beleuchtungsarten zu feuergefährlich sein würden.

Die hier skizzierten Ziele sind nicht so hochfliegende, wie jene des Berliner Vereins zur Förderung der Luftschiffahrt, welcher bekanntlich seinen Ballon bis 9000 m emporsteigen zu sehen hofft. Indessen ist ein gewisses Zusammenarbeiten beider Vereine sehr erwünscht, worüber sich Herr Professor Assmann in einer Abhandlung vom März d. J. in der Zeitschrift für Luftschiffahrt folgendermassen äussert (pag. 85): „Schliesslich haben wir noch des Plans zu gedenken, in mehreren Freiballons, welche in weiterer Entfernung von einander gleichzeitig aufsteigen, nach gleichen Methoden Beobachtungen anstellen zu lassen. Die Ausführung dieses Planes würde sich unschwer bewerkstelligen lassen, wenn man sich mit gleichstrebenden Forschern telegraphisch über Auffahrten verständigen wollte. Leider verbieten die politischen Beziehungen zu unseren westlichen und östlichen Nachbarn die Inangriffnahme einer gemeinsamen Aktion; sonst müsste man von gleichzeitigen Ballonfahrten, welche unter Verwendung gleicher Beobachtungsmethoden in Paris, St. Petersburg, Berlin und München stattfinden, ganz unschätzbare Aufschlüsse über die Atmosphäre über Europa erwarten!

Wir werden uns aber wohl darauf beschränken müssen, mit unseren gleichstrebenden Freunden in München, ... gemeinschaftlich an der Erforschung der Atmosphäre über

unserem Deutschland zu arbeiten! Auch dieses ist ein Ziel, welches grosse Ergebnisse verspricht!"

Zur Erreichung der Ziele, welche sich der Münchener Verein für Luftschiffahrt auf wissenschaftlichem Gebiet gesteckt hat, wäre die moralische Unterstützung seiner Bestrebungen seitens der k. b. Akademie der Wissenschaften von unschätzbarem Werte. Denn auf sich selbst und seine bescheidenen Mittel angewiesen, ist der Verein nicht im Stande, die kostspieligen Apparate (Aspirations-Psychrometer, selbstregistrierende Aneroide und Thermometer, Quecksilberbarometer, photographische Apparate, elektrische Beleuchtungsvorrichtungen u. dgl.) anzuschaffen und auch noch wiederholte Auffahrten zu bestreiten, deren jede ja mehrere hundert Mark Kosten verursacht. Wenn aber eine hochangesehene wissenschaftliche Korporation wie diese hohe Klasse der Akademie den Nutzen der fraglichen Vereinsbestrebungen ausdrücklich anerkennt, so wird die Beschaffung der erforderlichen Mittel wesentlich erleichtert werden.

Ich will nicht unterlassen zu erwähnen, dass die kgl. preussische Akademie die Erspriesslichkeit solcher Bestrebungen bereits unzweideutig anerkannt hat, nämlich durch pekuniäre Unterstützung aus ihren Fonds. Unter diesen Umständen ist es kein Wunder, dass dem Berliner Verein zur Förderung der Luftschiffahrt von Seiten mehrerer Privaten reiche Unterstützung zuteil geworden ist. Herr Kommerzienrat Rudolph Hertzog hat für einen Fesselballon eigens Primaseide anfertigen lassen und sie jenem Verein zur Verfügung gestellt, ein Geschenk von mehr als 1100 Mark. Herr Geh. Rath Werner v. Siemens schenkte ein 800 m langes Kabel von Wolframstahldraht mit isolirter Kupferleitung; derselbe stellte für den Fesselballon sein Terrain neben der Charlottenburger Gasfabrik zur Verfügung und erbaute daselbst sogar eine Ballonhalle. Herr Killisch v. Horn, Besitzer des Berliner Börsenkuriers, überwies dem

Verein 3000 Mark zur Beschaffung wissenschaftlicher Instrumente und stellte dem Verein überdies seinen Privatballon M. W. zur Verfügung (ähnlich wie unser Verein den Privatballon des Herrn v. Sigsfeld dauernd benutzen durfte, so lange er noch brauchbar war). Bekanntlich hat nun vor kurzem S. Majestät der Kaiser Wilhelm ein von mehreren Gelehrten, namentlich auch von v. Helmholtz unterzeichnetes Immediatgesuch damit beantwortet, dass er für die Zwecke des Berliner Vereins 50000 Mark anwies.

Angesichts aller vorstehenden Erwägungen und thatsächlichen Mitteilungen ist die hohe Klasse vielleicht geneigt, meiner Bitte zu willfahren und zu Gunsten des Münchener Vereins für Luftschiffahrt eine Erklärung abzugeben, durch welche die wissenschaftlichen Bestrebungen des Vereins als für die Wissenschaft förderlich anerkannt werden.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1892.

Die Festsitzung wurde mit folgenden Worten des Präsidenten der Akademie, Geh.-Raths Dr. von Pettenkofer, eröffnet:

„Die heutige Festsitzung der k. Akademie der Wissenschaften findet statt zu Ehren ihres Protectors, Sr. K. Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold von Bayern, dessen Namensfest hiemit gefeiert wird. Die Akademie blickt jedes Jahr an diesem Tage dankbar auf zu ihrem Protector, dabei ihrer Stiftung und Entwicklung durch allerhöchst dessen Vorfahren aus dem Hause Wittelsbach gedenkend, welche gleich unserm Protector nicht nur Herren, sondern auch Freunde und Förderer ihres Landes waren.

Dieser Tag ist jährlich auch dazu bestimmt, die Wahlen neuer Mitglieder zu verkünden, nachdem die allerhöchste Bestätigung derselben erfolgt ist.

Die Mitglieder der Akademie theilen sich in ordentliche und ausserordentliche, am Sitze der Akademie wohnende, und in auswärtige und correspondirende. Sie gehören der philosophisch-philologischen, der mathematisch-physikalischen und der historischen Classe an. Neben diesen drei Fachclassen hat die Akademie auch Ehrenmitglieder, als welche

Personen gewählt werden, welche nicht Fachleute zu sein brauchen, aber sich durch Liebe zu den Wissenschaften und durch Unterstützung derselben verdient gemacht haben.

Ich habe heute zunächst als Präsident die Wahl eines Ehrenmitgliedes zu verkünden, und zwar — was bisher noch nicht dagewesen ist — eines weiblichen.

Nach den zur Zeit gültigen Gesetzen können Frauen nicht Mitglieder einer der drei Classen der Akademie werden, auch nicht, wenn sie sich in einer Fachwissenschaft vor Männern hervorgethan haben. Anders liegt es bei den Ehrenmitgliedern. Die Constitutionsurkunde der k. Akademie der Wissenschaften vom 1. Mai 1807 bestimmt, dass zu Ehrenmitgliedern Persönlichkeiten gewählt werden können, „welche nach ihren Verhältnissen die Bedingungen zu ordentlichen Mitgliedern nicht erfüllen, aber sonst durch Rang oder andere äussere Verhältnisse, verbunden mit wissenschaftlichen Kenntnissen und Liebe zu den Wissenschaften, zur Beförderung der Zwecke der Akademie beitragen können.“

Es konnte uns nur erfreulich sein, eine Dame von hohem Range, aus dem Hause Wittelsbach zu wissen, welche alle diese Vorbedingungen in reichem Maasse erfüllt hat. Sie hat durch ausgebreitete gründliche Sprachstudien, durch Anlage werthvoller naturwissenschaftlicher Sammlungen, wovon sie interessante Stücke auch den wissenschaftlichen Sammlungen des Staates einverleibte, nicht nur grosse Liebe zu den Wissenschaften schon gezeigt, sondern ist auch literarisch unter dem Pseudonym Th. von Bayer durch Beschreibung ihrer Reisen nach Norwegen, in den Polarkreis und nach Russland hervorgetreten. Gegenwärtig arbeitet die hohe Dame wieder an einem grossen Reisewerk über Brasilien.

Die Gesammt-Akademie wählte demnach Ihre Königliche Hoheit Prinzessin Therese von Bayern zum Ehren-Mitgliede.“

Wahlen.

Von der mathematisch-physikalischen Classe wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

zu ordentlichen Mitgliedern:

Das bisherige ausserordentliche Mitglied Herr Dr. Walther Dyck, o. Professor für Mathematik an der technischen Hochschule dahier;

Herr Joh. Bauschinger, o. Professor für Mechanik an der technischen Hochschule dahier;

Herr Dr. Karl Goebel, o. Professor für Botanik an der Universität München;

zu correspondirenden Mitgliedern:

Geh. Regierungsrath Dr. Wilhelm Foerster, o. Professor für Astronomie an der Universität und Director der k. Sternwarte zu Berlin;

Herr Dr. Alexander Rollet, o. Professor für Physiologie an der Universität Graz.

Sodann sprach der Präsident der Akademie noch Folgendes:

„Ich habe noch einige Auszeichnungen zu erwähnen, welche die Akademie und das mit ihr verbundene Generalconservatorium der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates im Laufe des letzten Jahres verdienten Gebern zugewandt haben: Die akademische Denkmünze erhielten die Herren Hans Andrä und L. Bruck in Sydney für Geschenke an das Ethnographische Museum, Bauinspector F. A. Schran in Kamerun für Geschenke an die zoologische und ethnographische Sammlung, sodann Gutsbesitzer Friedrich Winkelmann in Pfünz bei Eichstätt für Verdienste um Ausgrabung und Erforschung des römischen Castells daselbst.

Die k. Staatsregierung ist stets besorgt, unsere wissenschaftlichen Sammlungen zu ergänzen und zu heben.

Mit ihrer Genehmigung wurden aus dem sogenannten Mannheimer Reservefonds für die mineralogische Sammlung 6000 Mark zum Ankauf der ausgezeichneten Sammlung alpiner Mineralien des verstorbenen k. und k. Bergraths Hohenbalken bewilligt, ferner ein Zuschuss von 2000 Mark zum Ankauf der Graphittrophäe des Herrn Alibert in Paris gewährt, welcher der Sammlung eine Nephrittrophäe zum Geschenk machte. Beide Prachtstücke sind bereits in einem der Sammlungsräume des Mineraliencabinets aufgestellt, welcher Raum durch Verhandlungen des Cultusministeriums mit der Hofkirchenverwaltung St. Michael gewonnen wurde. Das Ethnographische Museum erhielt bisher aus dem Mannheimer Reservefonds 8000 Mark und zum Ankauf der vom Conservator Professor Dr. Max Buchner auf seinen Reisen in verschiedene Welttheile gesammelten Gegenstände vom jüngsten Landtage die Summe von 24000 Mark bewilligt.



Für die laufenden Publicationen der Akademie, Sitzungsberichte, Denkschriften u. s. w. werden regelmässig im Etat durch das Finanzgesetz die erforderlichen Mittel bewilligt. Daneben unterstützt die Akademie mit den bescheidenen Mitteln, welche ihr der Verkauf ihrer Schriften gewährt, besondere wissenschaftliche Arbeiten in den drei Classen, so früher in der philosophisch-philologischen Classe die Herausgabe von Wölfflins Archiv für lateinische Lexikographie und Grammatik, und neuerdings Krumbachers Byzantinische Zeitschrift; in der mathematisch-physikalischen Classe den Druck des schon von Lamont begonnenen Sternkatalogs. Ebenso wurden Fraunhofers gesammelte Werke herausgegeben und ist die Herausgabe der Schriften des Mathematikers Otto Hesse in Vorbereitung. Die historische Classe gibt die Monumenta Tridentina heraus, ein Quellenwerk ersten Ranges für die Geschichte des Trienter Concils, welches Werk leider im Augenblick durch den Tod des Verfassers, unseres Mitgliedes August v. Druffel. unterbrochen ist und eines Vollenders harrt."

Sitzung vom 3. Dezember 1892.

1. Herr E. Lommel macht eine Mittheilung: „Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens."

2. Herr W. Dyck legt vor und bespricht den Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, welcher aus Anlass der beabsichtigten mathematischen Ausstellung bei der unterbliebenen Naturforscherversammlung zu Nürnberg mit Unterstützung der k. b. Akademie und des Reiches von Herrn Dyck herausgegeben wurde.

Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens.

Von E. Lommel.

(*Eingelaufen 3. Dezember.*)

Es ist nicht schwer, einzusehen, dass die zu den Stromlinien einer leitenden dünnen Platte senkrechten Linien gleichen Potentials zugleich die zu der Strömung gehörigen magnetischen Kraftlinien sind. Streut man daher Eisenfeilspäne auf die Platte, so ordnen sich dieselben bei genügender Stromstärke zu einem schönen Bilde der Aequipotentiallinien.

Die benutzten Platten waren Kupferplatten von circa $\frac{1}{2}$ mm Dicke und von verschiedenen Formen, an deren Rand, in der Ebene der Platte liegend, die Zuleitungsdrähte angelöthet waren. Die angewendete Stromstärke betrug circa 20 Ampère. Die Feilspäne gruppiren sich immer so, wie es die Theorie für die Aequipotentiallinien verlangt; die Curven stehen namentlich stets senkrecht zu den Begrenzungslinien der Platte (die ja immer Stromlinien sind), wo sie umbiegen, um auf der Rückseite der Platte in sich zurückzulaufen. Um die Bilder festzuhalten, wurde über die Platte (bei rother Beleuchtung) photographisches Papier gebreitet und auf dieses die Eisenfeile gesiebt; die Figuren bilden sich auf dem Papier ebenso vollkommen aus, wie auf der Platte



selbst, und das Aufflammen eines Zündhölzchens genügt, um das Bild dem lichtempfindlichen Papierblatt einzuprägen. Mit Beiseitelassung der einfacheren und bekannteren Fälle seien von den zahlreichen Aufnahmen hier nur zwei minder gewöhnliche Beispiele wiedergegeben. Fig. 1 zeigt die Aequipotentialen einer ringförmigen, von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Platte, mit Elektroden an den Endpunkten eines Durchmessers des äusseren Kreises. Da die Aequipotentiallinien nur auf der Platte selbst, nicht aber auf ihrer nichtleitenden Unterlage entstehen, so geben sie zugleich ein durch jene Linien schraffirtes Bild der Platte selbst; in derselben Weise bilden sich auch die Zuleitungsdrähte ab. Die Figur 2 wurde erzeugt über einer rechteckigen Platte mit einem kreisrunden Loch und Elektroden an zwei gegenüberliegenden Ecken; auch hier ist das Bild der Platte sammt ihren Zuleitungsdrähten deutlich zu erkennen.

Die Erkenntniss, dass die Aequipotentialen Magnetkraftlinien sind, legte den Gedanken nahe, dass die Lagenänderung der Aequipotentiallinien in einem Magnetfelde, wie sie im Hall'schen Phänomen beobachtet wird, vielleicht als eine unmittelbare Wirkung der Kraftlinien des Magnetfeldes auf die Kraftlinien der Strömung angesehen werden könne. Sind jedoch die Magnetkraftlinien zur Platte parallel, so zeigt sich das Hall'sche Phänomen bekanntlich nicht. Nähert man der durchströmten Platte in ihrer Ebene irgendwo von seitwärts einen Magnetpol, so ordnen sich die Feilspäne in Linien, welche augenscheinlich die Resultanten sind aus den beiden Systemen von Kraftlinien, deren jedes unabhängig für sich bestehen bleibt. Von einer unmittelbaren Wirkung der Magnetkraftlinien auf die Aequipotentialen kann also nicht die Rede sein.

Das Hall'sche Phänomen wird vielmehr nur hervorgerufen durch Magnetkraftlinien, welche senkrecht zur Platte

Fig. 1.

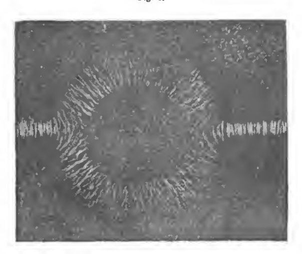
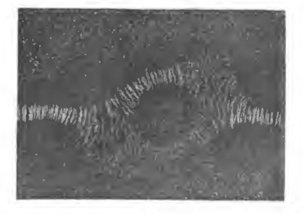
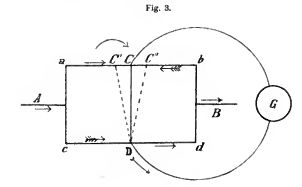


Fig. 2.



stehen, oder, bei schiefer Richtung der Kraftlinien, nur durch deren zur Platte senkrechten Componenten.

Fig. 3.



Die Art der Wirkung des Magnets auf die Platte in diesem Falle stelle ich mir vor wie folgt. Der Primärstrom durchfliesse die rechteckige Platte $a\,b\,c\,d$ (Fig. 3) in der Richtung der Pfeile bei A und B. An den Endpunkten einer Aequipotentiallinie, bei C und D, seien die nach dem Galvanometer G führenden Drähte angelegt. Nun werde ein homogenes Magnetfeld erregt, dessen Kraftlinien senkrecht zur Platte (zur Ebene der Zeichnung) gerichtet sind; der gebogene Pfeil bezeichne die Richtung der Ampère'schen Ströme des Magnets. Besteht die Platte aus einem diamagnetischen Metall, so werden in ihr nach W. Weber's Theorie des Diamagnetismus Molekularströme wachgerufen, welche den Ampère'schen Strömen des Magnets entgegengerichtet siud, und sich in bekannter Weise zu einem resultirenden Strome zusammensetzen, welcher den Rand der Platte in der Richtung der gefiederten Pfeile umfliesst. Längs ab ist dieser Molekularstrom dem Primärstrom entgegengesetzt, längs cd ihm gleichgerichtet. Der Primärstrom entlang ab wird also durch die Wirkung des Magnets geschwächt, derjenige entlang cd verstärkt. Ist die Leitfähigkeit längs ab

und cd die gleiche geblieben, so folgt, dass längs ab die elektromotorische Kraft des Primärstroms vermindert, längs cd um ebensoviel vermehrt ist. Der Punkt D hat demnach nicht mehr wie vorher das gleiche Potential wie der Punkt C, sondern ein höheres. Verbindet man daher D mit C durch ein Galvanometer, so geht durch letzteres ein Strom in der Richtung des Pfeiles bei D, der Hall'sche Strom. Ein Punkt auf ab von gleichem Potential mit D würde jetzt links von C etwa bei C' liegen müssen, und die Gerade DC', welche diese jetzt äquipotentialen Punkte verbindet, gegen DC in der den Magnetströmen entgegengesetzten Richtung gedreht erscheinen (negative Drehung). Besteht dagegen die Platte aus einem magnetischen Metall mit praeformirten Molekularströmen, welche sich mit den Magnetströmen gleichrichten, so verstärkt der resultirende Molekularstrom den Primärstrom in ab, und schwächt ihn in cd, der Hall'sche Strom geht jetzt von dem höheren Potential in C nach dem niedrigeren in D in entgegengesetzter Richtung wie vorhin durch das Galvanometer, und die Gerade DC'', welche man vom Punkte D nach dem jetzt mit ihm äquipotentialen Punkte C'' zieht, ist gegen DC im Sinne der Magnetströme gedreht (positive Drehung).

Wird durch diese Wirkung des Magnets auf den Primärstrom das Potential in D um den Betrag e erhöht, in C um ebensoviel erniedrigt, so ist $2e$ die Klemmenspannung der Galvanometerleitung DGC; ist r deren Widerstand, so hat der durch das Galvanometer fliessende Strom die Stärke $2e/r$. Ist ferner ε die im ganzen Stromkreis $DGCD$ wirksame elektromotorische Kraft und R der Widerstand der Platte, so ist dieselbe Stromstärke auch $\varepsilon/(R+r)$, und man findet durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke die elektromotorische Kraft des Hall'schen Stromes

$$\varepsilon = 2e\frac{R+r}{r},$$

oder genähert, wenn r gegen R klein ist (eine für das Gelingen des Hall'schen Versuches erforderliche Bedingung):

$$\varepsilon = 2e\frac{R}{r}.$$

Die Grösse $2e$ ist offenbar der Stärke M des Magnetfeldes proportional. Da sie ferner mit dem Primärstrome verschwindet, so setzen wir sie auch dessen Stromstärke J proportional. Wir denken uns nämlich die Wirkung jener Molekularströme als eine Art Reibung, welche für sich keine Bewegung hervorrufen, sondern nur vorhandene Bewegung ändern kann. Wir setzen demnach

$$2e = \varkappa J M,$$

wo $\varkappa$ eine Art Reibungscoëffient vorstellt, der von der molekularen Beschaffenheit des Plattenmaterials abhängt. Der Widerstand R der Platte ist ihrem Querschnitt, also auch ihrer Dicke δ umgekehrt proportional. Fasst man alle beim Versuch unverändert bleibenden Grössen in einen constanten Factor K zusammen, so ergibt sich die elektromotorische Kraft des Hall'schen Stromes:

$$\varepsilon = K \cdot \frac{JM}{r\delta};$$

dieselbe ist also direct proportional der Stärke des Primärstromes und des Magnetfeldes, umgekehrt proportional der Dicke der Platte und dem Widerstande des Galvanometers, was mit den Ergebnissen der Erfahrung in vollkommenem Einklang steht.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1892.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten. — Die zunächst für die philos.-philol. u. histor. Classe bestimmten Druckschriften sind in deren Sitzungsberichten 1892 Heft IV verzeichnet.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XV, part 1. 1892. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen aus dem Osterlande. N. F. Band V. 1892. 8⁰.
Verzeichniss der Mitglieder. 1892. 8⁰.

Société d'études scientifiques in Angers:

Bulletin. Nouv. Sér. Année 20, 1890. 1891. 8⁰.

Texas Academy of Science in Austin:

Transactions. Vol. I. Nr. 1. 1892. 8⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

25th annual Report. June 1, 1892. 8⁰.

Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië in Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 51. 1892. 8⁰.

K. Preuss. geologische Landesanstalt in Berlin:

Abhandlungen. N. F. Heft 11. 1892. 8⁰.
Jahrbuch für das Jahr 1890. 1892. 8⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 25. Jahrg. Nr. 12—18. 1892. 8⁰.



Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 44, Heft 2. 1892. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. V. Register. Bd. VI. Nr. 7—18. 1892. 8⁰.

K. meteorologisches Institut in Berlin:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1889 Heft 3. 1892 Heft 1. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXI. Heft 3. 1892. 8⁰.

K. Sternwarte in Berlin:

Beobachtungs-Ergebnisse. Heft 6. 1892. 4⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in Berlin:

Gartenflora, Zeitschrift. 41. Jahrg. 1892. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. 1892. Nr. 27—52. 4⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde:

Zeitschrift. XII. Jahrg. 1892. Heft 7—12. Berlin. 1892. 8⁰.

Allgemeine schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Bd. 32, Abth. 2. Basel 1891. 4⁰.
Actes de la Société Helvétique des sciences naturelles réunie à Fribourg les 19 à 21 août 1891. Fribourg 1892. 8⁰.
Comptes rendus des travaux présentés à Fribourg les 19 à 21 août 1891. Genève 1891. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen aus dem Jahre 1891. Nr. 1265—1278. 1892. 8⁰.

Philosophical Society in Birmingham:

Proceedings. Vol. VII, part 2. 1891. 8⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn.

Verhandlungen. 49. Jahrg. 1. Hälfte. 1892. 8⁰.

Société de géographique commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1892. Nr. 12—22. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 43. 1889. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Memorial of Joseph Lovering, late President of the Academy. Cambridge. 1892. 8⁰.
Proceedings. Vol. XXVI. 1891. 8⁰.

Verein für Naturwissenschaften in Braunschweig:

Kloos, Ueber die geolog. Verhältnisse des Untergrundes von Braunschweig. 1891. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Serie. Tom. 6 Nr. 6—9. 1892. 8⁰.
Mémoires conronnés in 8⁰. Tom. XI, fasc. 5. 1892. 8⁰.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Természettndomanyi Értekezések (Naturwissenschaftl. Abhandlungen) Bd. XXI. 4. Bd. XXII. 1—3. 1891—92. 8⁰.
Mathematikai Értekezések. Bd. XIV. 5. Bd. XV. 1. 1891—92. 8⁰.
Mathematikai Értesitö. (Mathematischer Anzeiger) Band X, 1—7. 1891—92. 8⁰.
Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mittheilungen). Band XXIV, 8—10. 1891. 8⁰.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte. Band IX, 1. 2. Bd. X, 1. Berlin 1892. 8⁰.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

A m. kir. Földtani intézet évkönyve. Bd. X. Nr. 2. 3. 1892. 8⁰.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. X. Nr. 1. 2. 1892. 8⁰.
Földtani Közlöny. Bd. XXII. Nr. 5—10. 1892. 8⁰.
Supplement Katalog. 1892. 8⁰.

K. Ungarische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Budapest:

Pungur, Gryllodea regni Hungariae. 1891. 4⁰.
Hermann, Petényi der Begründer der wissenschaftlichen Ornithologie in Ungarn. 1891. 4⁰.
Daday, Literatnra zoologica Hungarica. 1891. 8⁰.

Instituto de marina de San Fernando in Cadix:

Almanaque naútico para 1894. Madrid 1892. 4⁰.
Anales. Seccion 2ª. Observaciones meteorológicas. Año 1891. 1892 fol.

Meteorological Department of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. August—Dezember 1891. Januar—Mai 1892. fol.
Meteorological Observations. August—Dezember 1891. Januar—Mai 1892. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. V. part 1. 1892. fol.
Cyclone Memoirs. Part III. 1890. 8⁰.

Revenue and Agricultural Department of the Government of India in Calcutta:

Memorandnm on the snowfall in the mountain districts. 1892. fol.



Indian Museum in Calcutta:

List of the Batrachia by W. L. Sclater. London 1892. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXV. part 2. 3. 1892. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VII, part 6. 1892. 8⁰.
Transactions. Vol. XV, part 3. 1892. 4⁰.

Museum of comparative Zoölogy in Cambridge:

Memoirs. Vol. XIV. Nr. 2. 1892. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge Mass:

Annals. Vol. XV, part 2. Karlsruhe 1892. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV. Vol. 4. 1892. 4⁰.
Bullettino mensile 1892. Fasc. 26—29. 8⁰.

Observatory in Cincinnati:

Publications. Nr. XII. 1892. 4⁰.

K. Sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1891. 1. Hälfte. 1892. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tom. 27. Paris 1891. 8⁰.

Universität in Christiania:

Jahrbuch des meteorol. Instituts 1890. 1892. 4⁰.
Archiv for Mathematik. Bd. XV, 2. 3. 1892. 8⁰.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 32. Heft 4. 1892. 8⁰.
Axel Johannessen, Die epidemische Verbreitung des Scharlachfiebers in Norwegen. 1884. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. 35. Jahrg. 1890/91. 1892. 8⁰.

Chemiker Zeitung in Cöthen:

Chemiker Zeitung. Nr. 49—52. 55—100. Cöthen 1892. fol.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mittheilungen. N. F. Band 1. Jahrg. 1889 u. 1890. 1891. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. VIII. Heft 1. 1892. 4°.
Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Gesellschaft. 1893. 8°.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tom. VII, 2. 3. 4. 1892. 4°.

Colorado scientific Society in Denver:

Report on technical determination of Zinc. Pueblo 1892. 8°.
The Post-Lamarie Beds of Middle Park, Colo. by Whitman Cross. 1892. 8°.
F. C. Knight, A volumetric method. 1892. 8°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. XII. Janvier—Août 1891. 8°.

Meteorologisches Observatorium in Dorpat:

Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1891. Bd. 6. Heft 1. 1892. 8°.

Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat:

Sitzungsberichte. Bd. IX. Heft 3, 1891. 1892. 8°.
Schriften Nr. VI. 1891. 4°.

Kais. livländische gemeinnützige u. ökonomische Sozietät in Dorpat:

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen für die Jahre 1889—1891. 1892. 4°.

Pollichia in Dürkheim a. d. H.:

Festschrift zur 50jährigen Stiftungsfeier. 1892. 8°.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. IV. 1892. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

75. Jahresbericht für die Jahre 1890/91. 1892. 8°.

R. Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Serie. Vol. XV. disp. 2. 1892. 8°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt:

Abhandlungen. Bd. XVII, 1. 2. 1884--91. 4°.
Bericht. 1892. 8°.
O. Boettger, Katalog der Batrachier Sammlung im Museum der Gesellschaft. 1892. 8°.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für das Jahr 1890/91. 1892. 8°.

Naturwissenschaftl. Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. 9. Jahrg. Nr. 11. 12. 10. Jahrg. Nr. 1—8. 1892. 8⁰.
Societatum Litterae. 6. Jahrg. Nr. 1—10. 1892. 8⁰.

Sternwarte in Genf:

Résumé météorologique de l'année 1891 pour Genève. 1892. 8⁰.

Kruidkundig Genootschap Dodonaea in Gent:

Botanisch Jaarboek 4. Jaarg. 1892. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Serie II. Vol. 10. 11. 1890—92. 8⁰.

University Observatory in Glasgow:

Second Glasgow Catalogue of 2156 Stars, by Robert Grant. 1892. 4⁰.

The Journal of comparative Neurology in Granville:

Journal. Vol. II. p. 21—136. 1892. 8⁰.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz:

Mittheilungen. XXVII. Vereinsjahr 1891. 1892. 8⁰.

K. Niederländ. Regierung in Haag:

Nederlandsch kruidkundig archief. II. Ser. Dell VI. Stuk 1. Nijmegen 1892. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax, Nova Scotia:

Proceedings and Transactions. Vol. I. part. 1. 1891. 8⁰.

Kais. Leop.-Carolinische Akademie der Naturforscher in Halle a/S.:

Leopoldina. Heft XXVIII. Nr. 11—20. 1892. 4⁰.

Naturw. Verein für Sachsen und Thüringen in Halle a/S.:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 65. Heft 1—3. Leipzig 1892. 8⁰.

Société Hollandaise des sciences in Harlem:

Archives Néerlandaises. Tom. XXV, 5. XXVI, 2. 3. 1892. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:

Fennia. Bd. 5. 1892. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

Carte géologique de la Finlande, livr. 18—21 accomp. de renseignements. 1890—92.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. XXVII, 1. 2. 1892. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie in Karlsruhe:

Jahresbericht für das Jahr 1891. 1892. 4⁰.

Technische Hochschule in Karlsruhe:

Festgabe zum Jubiläum der 40jährigen Regierung des Grossherzogs von Baden. 1892. 4⁰.

Ministerial-Kommission zur Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Ergebnisse der Beobachtungs-Stationen. Jahrgang 1891. Heft 4—12. 1892. 4⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum von Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1892. 8⁰.

Aerztlich-naturwissensch. Verein in Klausenburg:

Értesitö. 4 Hefte. 1892. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 32. Jahrg. 1891. 4⁰.
Beiträge zur Naturkunde Preussens. Nr. 6 u. 7. 1890. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Mémoires. Classe des sciences. Tom. VII, Nr. 5. 1891. 4⁰.

Kais. Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Pamietnik matemat. Tom. XVIII, 2. 1892. 4⁰.
Rozprawy matemat. Serie II. tom 2. 1892. 8⁰.
Sprawozdanie komisyi fizyogr. Tom. 27. 1892. 8⁰.

Botanischer Verein in Landshut:

12. Bericht, 1890—91. 1892. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 3. Série Vol. 28 Nr. 107. 108. 1892. 8⁰.

Archiv der Matemathik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Theil XI. Heft 2. 3. Leipzig 1892. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrschrift. 27. Jahrg. Heft 2. 3. 1892. 8⁰.
Catalog der astronomischen Gesellschaft I. Abth. Stück 5. 1892. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Berichte. Mathem.-phys. Klasse 1892. II. III. 8⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Klasse. Bd. XVIII. Nr. 7. 8. 1892. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal 1892. Nr. 12. 13. Neue Folge. Bd. 46. Nr. 2—10. Leipzig. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mittheilungen 1891. 1892. 8⁰.

K. K. Berg-Akademie in Leoben:

Programm für das Jahr 1892/93. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Löwen:

La Cellule. Tom. VIII, fasc. 1. 1892. 4⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 50 Nr. 307. Vol. 51. Nr. 310—316. 1892. 8⁰.
Philosophical Transactions. Vol. 182. A. u. B. 1892. 4⁰.
List of the Members. 30. Novemb. 1891. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 52. Nr. 8. 9. Vol. 53. Nr. 1. 1892. 8⁰.
Memoirs. Vol. 50. 1890—91. 1892. 4⁰.

Chemical Society in London:

Journal. Nr. 356—361. July—December 1892. 8⁰.
Proceedings. Nr. 114. 115. 116. 1892. 8⁰.

Geological Society in London:

The Quarterly Journal. Vol. 48, part 1—4. 1892. 8⁰.

Linnean Society in London:

Transactions. Botany. Vol. III, part 4—7. 1891/92. 4⁰.
The Journal. Zoology. Nr. 148—151.
Botany. Nr. 176. 194—201. 1891/92. 8⁰.
Proceedings. Nov. 1888—June 1890. 1891. 8⁰.
List of the Members 1891/92. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1892. part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1892. part 2. 3. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Vol. 46. Nr. 1180—1206. 1892. 4⁰.

Institut de physique à l'Université de Liége in Lüttich:

Sur un état de la matière caractérisé par l'indépendance de la pression par P. de Heen. Bruxelles 1892. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 19. livr. 2. 3. 1891/92. 8⁰.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Années 1888. 1889. 1890. 1889—91. 4⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. VIII. 1888—91. 1892. 8⁰.

The Governor in Council in Madras:

Results of observations of the fixed stars at the Government Observatory Madras in the years 1874—1876. By C. Michie Smith. 1892. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 33, fasc. 1. 2. 1890—91. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. I. 1891. 4⁰.

Public Library of Victoria in Melbourne:

Ferd. v. Müller, Iconography of Australian Salsolaceous Plants. IX. Decade. 1891. 4⁰.

Observatorio Meteorologico-Magnético Central in Mexico:

Boletin mensual. Tom. III. Nr. 4. 1892. 4⁰.

Sociedad cientifica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias y revista. Tom. V. cuad 9. 10. Tom. VI. cuad 1. 2. 1892. 8⁰.

Sociedad de geografia in Mexico:

Boletin. IVª época. Tom. II. Nr. 3—5. 1891—92. 8⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Ser. Tom. II. Nr. 2. 1892. fol.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Ser. III. Vol. XI. fasc. 1. 2. 1892. 8⁰.

Académie des sciences in Montpellier:

Mémoires. Sciences. Tom. XI. Nr. 2. 1891. 4⁰.
Mémoires. Médecine. Tom. VI. Nr. 2. 1891. 4⁰.

Royal Society of Canada in Montreal:

Proceedings and Transactions for the year 1891. Vol. 9. 1892. 4⁰.

Geological Survey of Canada in Montreal:

Catalogue of Canadian Plants. Part VI. 1892. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1892. Nr. 2. 8⁰.

Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 23. Jahrg. Nr. 6—10. 1892. 4⁰.

K. technische Hochschule in München:

Bericht über d. J. 1891/92. 4⁰.
Programm für die Jahre 1892/93. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- u. Schulangelegenheiten in München:

Geognostische Jahreshefte. IV. Jahrg. 1891. Cassel 1892. 4⁰.
Die Neuenburgischen Marine-Chronometer beobachtet u. prämiirt auf der Neuenburger Sternwarte. Neuchatel 1892. 4⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Série II. Tom. XI. fasc. 25. Paris 1892. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. II. Vol. VI. fasc. 6. 1892. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. 10. Bd. 3. Heft. Berlin 1892. 8⁰.

Institute of Engineers in Newcastle upon Tyne:

Transactions. Vol. 39. part 3. Vol. 40. part 5. Vol. 41. part 3. 4. 5. 1892. 8⁰.

The American Journal in New-Haven:

Journal of Science. 3. Series Vol. 43 Nr. 257—260. Vol. 44 Nr. 261. 262. May—October 1892. 8⁰.

Observatory of Yale University in New-Haven:

Report for the year 1891/92. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VI. Nr. 1—6. 1891/92. 8⁰.
Transactions. Vol. X. Nr. 7. 8. Vol. XI. Nr. 1—5. 1891/92. 8⁰.

American Museum of natural History in New-York:

Annual Report for the year 1891. 1892. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

Journal. Vol. XIV. Nr. 4—7. 1892. 8⁰.

American geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XXIV. Nr. 2. 3. 1892. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. IX. Band. 1892. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Band XVII, 1. und Mathematische Abtheilung, Band XIV. 1892. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Offenbach:

29—32. Bericht, 1887—1891. 1892. 8⁰.

Radcliffe Observatory in Oxford:

Results of astronomical and meteorological Observations made in the year 1887. 1891. 8⁰.

R. Università in Padua:

Relazione letta nell' Aula Magna il 26. Nov. 1892 dal Rettore Prof. Carlo F. Ferraris. 1892. 4⁰.

Onoranze centenarie a Galileo Galilei. Discorso del Rettore Magnifico. 1892. fol.

Per il terzo centenario della Inaugurazione di Galileo Galilei nello studio di Padova. 1892. fol.

Circolo metematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VI. fasc. 3. 4. 5. 1892. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Annata 15. 1892, Gennaio-Agosto. gr. 8⁰. 1892.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1892 Nr. 26—51. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 114 Nr. 26. Tom. 115 Nr. 1—25. 1892. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

14. Rapport. 1891. 4⁰.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 607—612. Juillet—Décembre 1892. 4⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Nouvelles Archives. III. Sér. Tom. 3. 1891. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tom. I. fasc. 4. Tom. II. fasc. 1—3. 1890/91. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Bulletin. VII. Sér. Tom. 13. 1er 2d et 3e Sémestre. 1892. 8⁰.
Comptes rendus. 1892 Nr. 12—16. 8⁰.
Bulletin. VII. Sér. tom. 13. trimestre 2. 1892. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XX. Nr. 3—6. 1892. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XVII, Nr. 6. 7. 1892. 8⁰.
Mémoires. Tom. V. Nr. 4. 1892. 8⁰.

Zeitschrift L'Electricien in Paris:

L'Électricien. 2. Ser. Tom. IV. Nr. 79—104. 1892. 4⁰.

Comité géologique in St. Pétersbourg:

Mémoires. Vol. XI. Nr. 2. XIII. Nr. 1. 1891 u. 1892. 4⁰.
Bulletins. Vol. IX. Nr. 9. 10. Vol. X. Nr. 1—9. XI. 1—4. et Supplément au Tom. X. 1891—92. 8⁰.

Kaiserl. botanischer Garten in St. Petersburg:

Trudy. Tom. XII. Nr. 1. 1892. 8⁰.

Russische astronomische Gesellschaft in St. Petersburg:

Iswestija. Heft 1. 1892. gr. 8⁰.

Chemisch-physikalische Gesellschaft der k. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXIV. Nr. 5—8. 1892. 8⁰.

Kais. russische mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Band XXVIII. 1891. 8⁰.

Institut Impérial de médecine expérimentale in St. Petersburg:

Archives des sciences biologiques. Tom. I. Nr. 3. 1892. 4⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1892. part. 1. 8⁰.

Alumni Association of the Philadelphia College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 29 Nr. 2. 1892. 8⁰.

Pennsylvania Geological Survey in Philadelphia:

Atlas: Southern Anthracite Field. Part IV. B. V. VI. 1892. 8⁰.

American phylosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. XXX. Nr. 137. 138. 1892. 8⁰.
Transactions. N. S. Vol. XVII. part 1. 2. 1892. 4⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. VIII. pag. 85—156. 1892. 4⁰.

Portland Society of natural history in Portland:

The Portland Catalogue of Maine Plants. 2ᵈ ed. 1892. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band VII. Theil I. 1892. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen und Prag:

Mittheilungen der deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag Wien 1892. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorolog. Beobachtungen im J. 1891. 1892. 4⁰.
Astronomische Beobachtungen in den Jahren 1888—1891. Appendix zum 49—52. Jahrg. 1893. 4⁰.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Casopis. Tom. XXI. Heft 5. 6. 1892. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. Heft 3, 1890/91. 1892. 8⁰.

Naturforscher Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. XXXV. 1892. 8⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Ser. V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. I. 1. Sem. fasc. 11. 12. 2. Sem. fasc. 1—10. 4⁰.
Atti. Serie IV. Memorie della classe di scienze fisiche. Vol. VI. 1890. 4⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 44 sessione VI. VII. Anno 45 sessione I. II. 1891/92. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1892. Nr. 2. 8⁰.

Specola Vaticana in Rom:

Pubblicazioni. Fasc. II. 1891. 4⁰.

Ufficio centrale meteorologico Italiano in Rom:

Annali. Vol. X. parte I—IV. 1892. 4⁰.
Annali. Vol. XI. parte 3. 1889. 1892. fol.

Academy of science in St. Louis:

Transactions. Vol. V. Nr. 3. 4. Vol. VI. Nr. 1. 1892. 8⁰.

American Association for the Advancement of Science in Salem:

Proceedings. 40th Meeting. 1892. 8⁰.

Société Scientifique du Chili in Santiago:

Actes. Tom. II. livr. 1. 2. 1892. 4⁰.

Deutscher wissenschaftlicher Verein in Santiago (Chile):

Verhandlungen. Band II. Heft 4. 1892. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture in Sidney:

Annual Report for the year 1891. 1892. fol.
Palaeontology. Nr. 5. 1892. fol.



Museum in Stavanger:

Aarsberetning for 1891. 1892. 8⁰.

Société des sciences in Strassburg:

Bnlletin. Tom. XXVI. fasc. 7. 8. 9. 1892. 8⁰.

Geological Survey of New South Wales in Sydney:

Records. Vol. III, part. 1. 1892. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico).

Boletin. Tom. I. Nr. 10—12. 1892. 4⁰.
Annnario XIII. Año 1893. 1892. 8⁰.

Royal Society in Tasmania:

Papers and Proceedings for 1891. 1892. 8⁰.

College of Science, Imperial University, Tokyo, Japan:

Journal. Vol. V. part. 2. 1892. 4⁰.
The Calendar for the year 1890/91 and 1891/92. 1891/92. 8⁰.

Medicinische Fakultät der Universität Tokio:

Mittheilungen. Bd. I. Nr. 5. 1892. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. II. part. 2. 1892. 8⁰.

Società adriatica di Scienze naturali in Triest:

Bollettino. Vol. XIII. parte 1. 2. 1891—92. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazione meteorologiche dell' anno 1891. 1892. 8⁰.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek. Jaargang 32. Deel 2. 1880. Jaarg. 43. 1891. 1892. 4⁰.

Physiologisches Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. IV. Reeks. Deel II. Stuk 1. 1892. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Report 1889—1890. 1891. 8⁰.
Contributions to knowledge. Vol. XXXVIII. 1892. 4⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report of the Superintendent for the year 1890—91. 8⁰.
Observations during the year 1888. 1892. 4⁰.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. XI. 1892. 8⁰.

U. S. Coast and geodetic Survey Office in Washington:

Report during the year ending June 1890. 1892. 4⁰.
Bulletin. Nr. 25. 1892. 4⁰.

U. S. Geological Survey in Washington:

Mineral Resources of the United States for 1889—90. 1892. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen 1892 Nr. 6—10. 4⁰.
Jahrbuch. Band 42 Heft 1. 1892. 4⁰.
Abhandlungen. Band XVII, Nr. 2. 1892. fol.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Band XXXV. 1890. 1892. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1892 Nr. 26—38. 40—45. 47—49. 51. 52. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mitteilungen. Band XXII. Heft 3—5. 1892. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 42. I. u. II. Quartal. 1892. 8⁰.

K. K. öster. Gradmessungs-Kommission in Wien:

Astonomische Arbeiten. Bd. III. Längenbestimmungen. 1891. 4⁰.
Verhandlungen über die am 21. April u. 2. September abgehaltenen Sitzungen. 1892. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band VII. Nr. 3. 1892. gr. 8⁰.

v. Kuffner'sche Sternwarte in Wien:

Publikationen. Band II. 1892. 4⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. 45. Jahrgang. 1892. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Sitzungsberichte. N. F. Band XXVII. Nr. 4. 5. 1892. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1892. Nr. 4—6. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Yokohama:

Mittheilungen. Heft 48—50. 1892. 4⁰. Band V. Supplem.-Heft 2. 3. 1892. fol.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

5. Jahresbericht. 1891. 1892. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 37. Jahrg. Heft 1. 2. 1892. 8⁰.
Generalregister der Publikationen. 1892. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

S. H. Albert I. Fürst von Monaco:

Résultats des Campagnes scientifiques. Fasc. II. 1892. 4⁰.

Lucien Anspach in Brüssel:

Le rôle de l'eau dans les cylindres à vapeur. Liége (1892). 8⁰.

Julius Bergbohm in Wien:

Entwurf einer neuen Integralrechnung. Leipzig 1892. 8⁰.

Giovanni Capellini in Bologna:

Res Ligustiche XX. Gerolamo Guidoni di Vernazza e le sue scoperte geologiche. Genova 1892. 8⁰.
I. tronchi di Bennettitee dei Musei Italiani. 1892. 4⁰.

Édouard Jannetaz in Paris:

Nouvelles recherches sur la propagation de la chaleur dans les corps cristallisés. Paris 1892. 8⁰.
Notice sur les travaux scientifiques de M. Édouard Jannetaz. 1892. 4⁰.

A. Kurz in Augsburg:

Beiträge zur geometrischen Optik. Berlin 1892. 4⁰.
Probleme der elastischen Biegung. s. l. 1892. 8⁰.
Theorie und Versuche über hydraulischen Druck (Sonderabdruck). 1892. 8⁰.
Die Central- und Momentan-Achse. 1892. (Ausschnitt.)

Émile Lemoine in Paris:

5 Broschüren, mathematischen Inhalts (Sep.-Abdr.). 1891/92. 8⁰.

Alexander Macfarlare in Austin, Texas:

Principles of the Algebra of Physics. Salem 1891. 8⁰.
On exact Analysis as the hasis of language. 1892. 8⁰.

G. Omboni in Padua:

Achille de Zigno, cenni biografici. Padova 1892. 8⁰.

Friedrich Prym in Würzburg:

Ueber orthogonale etc. Substitutionen. Göttingen 1892. 4⁰.
Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen von A. Krazer und F. Prym. Leipzig 1892. 4⁰.

M. Rajna in Mailand:

Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano. 1892. 8⁰.

Dr. Saint-Lager in Lyon:

La priorité des noms des plantes. Paris 1890. 8⁰.
Considérations sur le polymorphisme de quelques espèces du genre Bupleurum. Paris 1891. 8⁰.

Michele Stossich in Triest:

I distomi degli uccelli. 1892. 8⁰.
Nuova Serie di elminti veneti. Zagreb 1891. 8⁰.
I distomi dei mammiferi. 1892. 8⁰.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. Nr. LXXX. 1892. 8⁰.



Namen-Register.

Sach-Register.

A Fig. 1. B

A Fig. 2. B

A Fig. 3. B



Fig. 1.

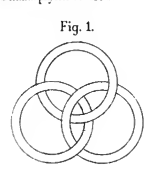


Fig. 2.

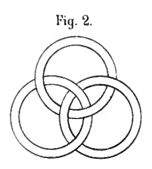


Fig. 3.

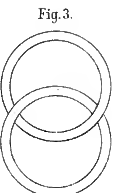


Fig. 4.

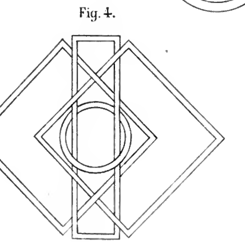
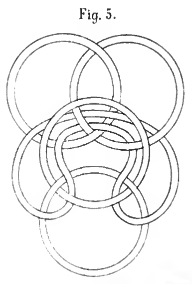


Fig. 5.



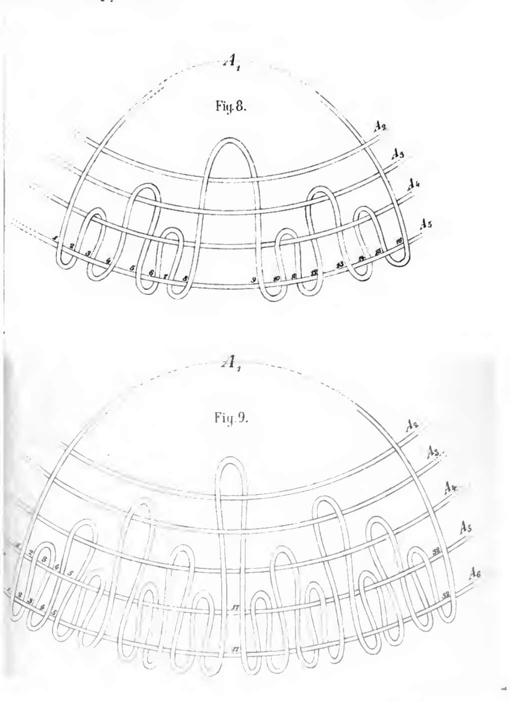


Fig. 8.

Fig. 9.

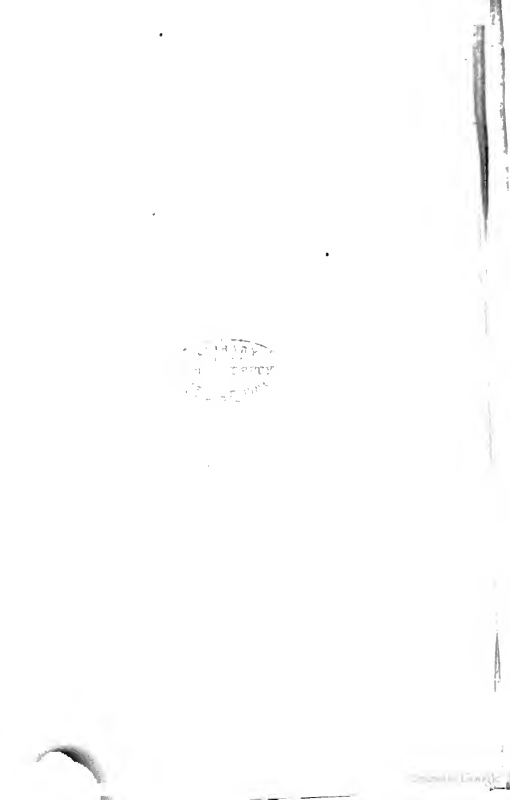


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 10.

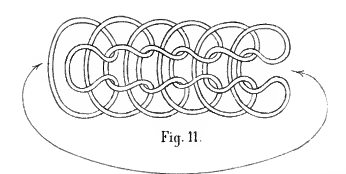
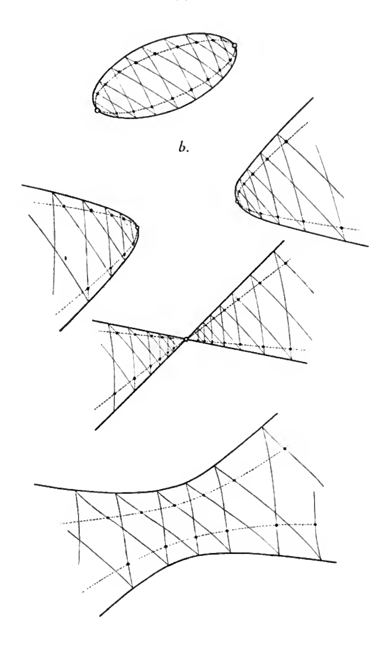


Fig. 11.

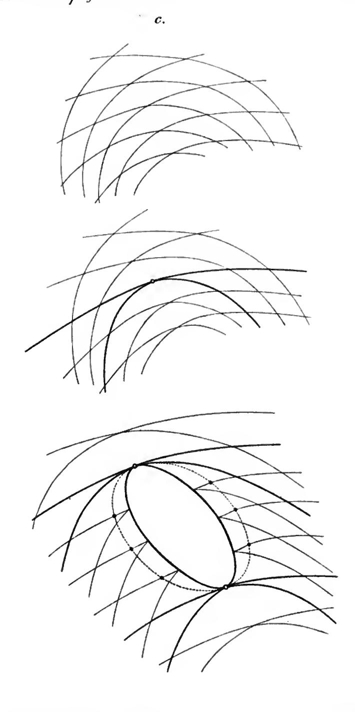




Zur Abhandlung von W. Dyck.

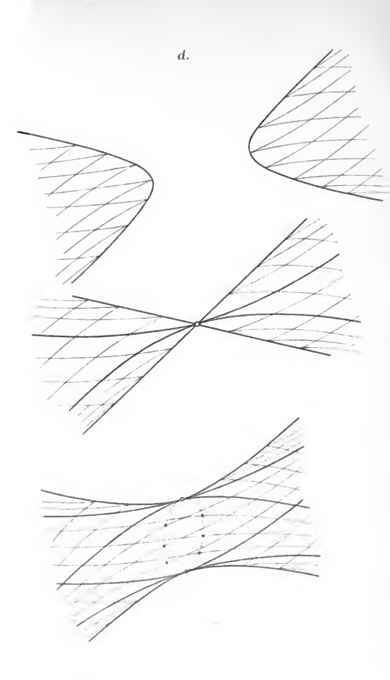


c.



Zur Abhandlung von W. Dyck.





Zur Abhandlung von W. Dyck.


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA




U.C. BERKELEY LIBRARIES
C036240552



